

# ÖSTERREICHISCHES INGENIEUR-ARCHIV

HERAUSGEGEBEN VON

K. FEDERHOFER-GRAZ · P. FUNK-WIEN · W. GAUSTER-WIEN  
K. GIRKMANN-WIEN · F. HOPFNER-WIEN · F. JUNG-WIEN · F. MAGYAR-WIEN  
E. MELAN-WIEN · H. MELAN-WIEN · K. WOLF-WIEN

SCHRIFTFÜHRUNG

F. MAGYAR-WIEN und K. WOLF-WIEN

BAND III, HEFT 3

MIT 43 TEXTABBILDUNGEN

(ABGESCHLOSSEN AM 19. JULI 1949)



WIEN  
SPRINGER-VERLAG  
1949



Das

## Österreichische Ingenieur-Archiv

erscheint zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften von wechselndem Umfang, die in kurzer Folge zur Ausgabe gelangen. Diese Hefte werden zu Bänden von 20 — 25 Bogen vereinigt. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten. Für Lieferungen in das Ausland gelten Auslandspreise.

Die für das Österreichische Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung des Österreichischen Ingenieur-Archivs (Springer-Verlag)  
Wien I, Mölkerbastei 5

zu senden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs veröffentlicht. Beiträge, welche bereits an anderer Stelle in wörtlich oder auch nur inhaltlich gleicher Fassung publiziert worden sind, können nicht aufgenommen werden. Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht.

Die Mitarbeiter erhalten 75 Sonderdrucke ihrer Beiträge kostenlos und können weitere 125 Exemplare, falls bei Rücksendung der ersten Korrektur bestellt, gegen angemessene Entschädigung geliefert erhalten.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Hinweglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Von Abbildungen ist sehr sparsamer Gebrauch zu machen, da sie die Drucklegung der Beiträge verzögern und auch den Preis der Zeitschrift verteuern. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen (Beschriftung nur in Bleistift ausführen) oder in klaren verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Springer-Verlag, Wien I, Mölkerbastei 5

Fernsprecher U 26-5-60 Serie — Telegrammadresse Springerbuch Wien

### Band III, Heft 3

### Inhaltsverzeichnis

#### Originalarbeiten.

Seite

- W. Mudrak, Die Berechnung des sternsymmetrischen einstöckigen Rahmens auf Winddruck nach dem Formänderungsverfahren. (Mit 6 Textabbildungen.)..... 203
- E. Ledinegg, Störungsrechnung elektromagnetischer Hohlräume bei mehrfachem Eigenwert 215
- H. Parkus, Beanspruchung und Schwingungen von Pleuelstangen. (Mit 3 Textabbildungen.) 222
- F. Ackerl, Der Vorwärtseinschnitt aus fehlerhaften Festpunkten. (Mit 4 Textabbildungen.) 235
- F. Magyar, Beitrag zur Feldtheorie der Flüssigkeitswirbel ..... 241
- A. Hochrainer, Die elastische Aufstellung des starren Körpers. (Mit 3 Textabbildungen.) 247

#### Berichte.

- A. L. Nadai, Das Fließen von Metallen unter verschiedenen Beanspruchungen. (Mit 27 Textabbildungen.) ..... 261

#### Buchbesprechungen ..... 290

Lenihan J. M. A., A Text Book of Electronics (F. Regler). — Grzywiński A., Flußkraftwerke und Stromwerke (E. Czitary). — Duschek A. und A. Hochrainer, Grundzüge der Tensorrechnung in analytischer Darstellung (R. Inzinger). — Gröbner W. und N. Hofreiter, Integraltafel (R. Inzinger). — Gombás P., Die statistische Theorie des Atoms und ihre Anwendungen (F. Regler). — Zworykin V. K., G. A. Morton, E. G. Ramberg, J. Hillier und A. V. Vance, Electron Optics and the Electron Microscope (W. Glaser). — Solvey O. R., Neue rationelle Betonerzeugung (F. Pongratz). — List H., Die Verbrennungskraftmaschine. Band 1, Teil 1: Vorwort und Einführung zum Gesamtwerk. Philippovich A., Die Betriebsstoffe für Verbrennungskraftmaschinen (L. Richter). — Hubauer R., Kleines Hilfsbuch für die Starkstromtechnik (L. Kneissler). — Edler R., Schaltungen aus dem Gebiete der Installationstechnik (L. Kneissler).



# Die Berechnung des sternsymmetrischen einstöckigen Rahmens auf Winddruck nach dem Formänderungsverfahren.

Von W. Mudrak, Graz.

Mit 6 Textabbildungen.

**Zusammenfassung.** Die Untersuchung des hochgradig statisch unbestimmten Systems wird wesentlich vereinfacht durch Einführung voneinander unabhängiger Verformungsgruppen, weil dann das Gleichungssystem soweit zerfällt, daß höchstens zwei miteinander gekoppelte Gleichungen auftreten. Es können dafür Beiwerte als Grundlage für die Ziffernrechnung bereitgestellt werden, so daß nach Eintragung der Systemmaße die Gleichungen sofort angeschrieben werden können. Ein Zahlenbeispiel.

**Summary.** The analysis of statically highly indeterminate systems is substantially simplified by introduction of independent "deformation groups", since the system of equations will then disintegrate to such an extent that at most two simultaneous equations appear. It is possible to determine coefficients for numerical calculations such that after obtaining the dimensions of the system, the final equations can be written down immediately. A numerical example follows:

**Résumé.** L'étude du système fortement hyperstatique est sensiblement simplifiée en introduisant des «groupes déformés» indépendants les uns des autres. Le système se subdivise alors de façon telle qu'il y a, au maximum, deux équations couplées. Il est possible d'établir les coefficients servant au calcul numérique, de sorte qu'il suffit d'insérer les cotes pour pouvoir écrire les équations. Un exemple numérique.

## 1. Einleitung.

Tragwerke nach Abb. 1 werden häufig als Stahlbetonunterbau für Kühltürme, Wasserhochbehälter u. dgl. angewendet. Während für sternsymmetrische Belastungen der Rechnungsgang mit Berücksichtigung sämtlicher Einflüsse von H. Craemer<sup>1</sup> gezeigt wurde, war die Belastung durch einseitigen Winddruck, die für die größten Schnittkräfte maßgebend ist, Gegenstand einer Reihe von Untersuchungen. Um die erhebliche Rechenarbeit zu vermindern, die einer in <sup>2, 3, 4</sup> dargelegten Berechnung in voller Allgemeinheit im Wege steht, werden oft mehr oder weniger weitgehende Vereinfachungen gebraucht, ohne daß deren Zulässigkeit allgemein erwiesen wäre. So werden in <sup>5, 6</sup> an geeignet scheinenden Stellen für die Berechnung Gelenke eingeführt, in <sup>7</sup> wiederum die Torsionssteifigkeit aller Stäbe und die Biegesteifigkeit

<sup>1</sup> H. Craemer: Vereinfachte Berechnung von Vieleckrahmen unter sternsymmetrischer räumlicher Belastung. Beton u. Eisen **30**, 377—381 (1931).

<sup>2</sup> A. Millies: Räumliche Vieleckrahmen. Berlin: Julius Springer. 1927.

<sup>3</sup> A. Rudakow: Berechnung der räumlichen symmetrischen Vieleckrahmen für beliebige Belastung. Ingenieur-Arch. **2**, 528—568 (1931).

<sup>4</sup> A. Rudakow: Berechnung räumlicher Rahmen nach der Deformationsmethode. Stahlbau **7**, 25—29 (1934).

<sup>5</sup> E. Reisinger: Berechnung eines Kühlturmunterbaues als räumliches Stabwerk. Bau-Ing. **7**, 550—554 (1926).

<sup>6</sup> K. Beyer: Die Statik im Eisenbetonbau, 2. Aufl., Bd. I, S. 208—215. Berlin: Julius Springer. 1933.

<sup>7</sup> A. Scheunert: Die vereinfachte Berechnung von Kühlturmunterbauten. Beton u. Eisen **39**, 133—136 (1940).



des Riegelkranzes in seiner Ebene vernachlässigt. O. Luetkens<sup>8, 9</sup> behandelt die Aufgabe durch Einführung von Gruppenlasten, wodurch er die Rechenarbeit auf ein erträgliches Maß zu vermindern imstande ist. Leider unterläßt er anzudeuten, aus welchen Überlegungen er die Verhältnisse zwischen den einzelnen Lasten seiner Lastgruppen wählt. Auch gelten seine Ableitungen, ebenso wie jene von Scheunert,<sup>7</sup> lediglich für den Sonderfall des achteckigen Rahmens. Weitere einschlägige Arbeiten sind <sup>10, 11, 12</sup>.

Im folgenden soll daher die Ableitung nach dem von Wansleben<sup>13</sup> stammenden Verfahren, das in seinen Grundgedanken auf Reißner<sup>14</sup> zurückgeht, für den Sonderfall des einstöckigen Vieleckrahmens mit lotrechten Stielen ohne Beschränkung der Eckenzahl nochmals allgemein dargelegt und bis zur ziffernmäßigen Angabe von Hilfs- werten für die Zahlenrechnung bei praktisch üblichen Eckenzahlen weitergeführt werden. Als Abschluß zeigt ein Zahlenbeispiel die Anwendung der eingeführten Hilfsgrößen.

## 2. Voraussetzungen.

Die Riegelachsen des betrachteten Rahmensystems bilden ein waagrecht liegendes regelmäßiges  $2n$ -Eck. Die Bezifferung der Knoten (Ecken) erfolgt, von oben gesehen, ausgehend von der unten angegebenen Bezugsachse rechts entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn von 1 bis  $n$ , links im Uhrzeigersinn von  $1'$  bis  $n'$ . Die Hauptträgheitsachsen der Riegelquerschnitte stehen lotrecht und waagrecht, die zugehörigen Trägheitsmomente ergeben, mit dem Elastizitätsmaß multipliziert, die Biegesteifigkeiten  $B_v$  und  $B_h$  um die vertikale und die horizontale Biegeachse. Die Drillungssteifigkeit des Riegels ist  $D_R$ , bezogen auf die Längeneinheit.

Die unter den Eckpunkten des Riegelvieleckes angeordneten lotrechten Rahmenstiele sind mit den Hauptträgheitsachsen ihrer Querschnitte tangential bzw. radial gerichtet, die zugehörigen Biegesteifigkeiten betragen  $B_t$  und  $B_r$ , die Drillungssteifigkeit  $D_s$ . Die Stiele werden als im Fundament starr eingespannt und an den Köpfen mit dem Riegekring allseitig biegesteif verbunden angenommen.

Obwohl die Untersuchung bei veränderlichen Trägheitsmomenten der Stiele und Riegel (in diesen selbstverständlich symmetrisch zur Feldmitte) keine grundsätzlichen Schwierigkeiten bereiten würde, sollen hier nur gleichbleibende Querschnitte vorausgesetzt werden, um die Formeln zu vereinfachen und den Gedankengang klarer hervortreten zu lassen.

Als Belastungen sollen hier nur Kräfte betrachtet werden, die in den Achsen der Riegel und Stiele wirken. Der dargelegte Rechenvorgang läßt sich jedoch sinngemäß auf die Belastung durch äußere Momente in den Knotenpunkten erweitern.

Die einzelnen Knoten samt den zugehörigen Stielen und die dazwischen liegenden Riegel sind nach Abb. 1 gekennzeichnet durch die Mittelpunktswinkel  $\varphi_i$  und  $\varphi_{im}$ . Dort ist auch der einer halben Vieleckseite entsprechende Zentriwinkel  $\alpha$  eingetragen.

<sup>8</sup> O. Luetkens: Die Berechnung des achtsstielligen Kühlturmunterbaues als räumliches Stabwerk. Bau-Ing. **21**, (1940) S. 259—266.

<sup>9</sup> O. Luetkens: Die Berechnung des achtsstielligen Kühlturmunterbaues als räumliches Stabwerk. Bau-Ing. **23**, (1942) S. 317—318.

<sup>10</sup> Krabbe: Allgemeines Verfahren zur Berechnung biegefest verbundener Stabsysteme. Stahlbau **7**, 33—36, 41—46 (1934).

<sup>11</sup> J. Vinzenz: Die statische Berechnung der Pfeilerfundamente von Eisenbetonkühltürmen. Beton u. Eisen **39**, 341—345 (1940).

<sup>12</sup> E. Schlechte: Der Verschiebungszustand räumlicher Rahmen mit zyklischer Symmetrie als Grundlage für den Spannungsnachweis, 80 S. u. 13 Abb. Dissertation. Dresden. 1940.

<sup>13</sup> F. Wansleben: Die Berechnung der regelmäßig vieleckigen Rahmenkuppeln. Stahlbau **13**, 81—90 (1940).

<sup>14</sup> H. Reißner: Über Fachwerke mit zyklischer Symmetrie. Arch. Math. u. Phys., III. Reihe **13**, 317—325 (1908).



Die durch die Belastungen in den Stäben auftretenden Biegemomente sollen dann als positiv angesehen werden, wenn sie in den in Abb. 1 festgelegten Kennfasern der Rahmenstäbe Zugspannungen hervorrufen, das ist in den Riegeln die Unter- bzw. die Innenseite, in den Stielen ebenfalls die Innenseite bzw. die dem mit dem nächsthöheren Index bezeichneten Stiel zugewendete Seite, also in der rechten Tragwerks- hälfte bei Betrachtung von außen die rechte. Die Bezeichnung der Biegemomente erfolgt entsprechend den zugehörigen Biegesteifigkeiten mit  $M_v$ ,  $M_n$ ,  $M_t$  und  $M_r$ . Torsionsmomente  $T_R$  und  $T_S$  sollen dann als positiv gelten, wenn die hierdurch entstehende Verformung die Erzeugenden des Stabes zu einer Rechtsschraube verdrillt, also bei einer Blickrichtung in der Stabachse den vorne gelegenen Querschnitt gegenüber einem rückwärtigen im Sinn des Uhrzeigers verdreht.

Die Querkräfte sollen dieselben Zeiger wie die zugehörigen Momente erhalten; ihr Vorzeichen sei so festgelegt, daß sie als positiv angesehen werden, wenn sie die jeweils linke Stabhälfte gegen die rechte nach oben zu verschieben suchen. Dabei sind für  $Q_n$  die Riegel und für  $Q_r$  die Stiele von außen, für  $Q_v$  die Riegel von oben und für  $Q_t$  die Stiele vom nächsthöher bezeichneten Stiel aus zu betrachten.

Die Wirkungen der Quer- und Normalkräfte auf die Formänderungen werden vernachlässigt, also nur jene der Biege- und Torsionsmomente in Rechnung gestellt. Dementsprechend erfahren die Stützenköpfe, zugleich Ecken des Riegelvielecks, keine Verschiebungen in lotrechter Richtung, sondern nur radiale  $u_i$  (positiv nach innen) und tangential  $w_i$  (positiv im Sinne wachsender  $i$ ). Sie sind in Abb. 2 durch einfache Pfeile dargestellt. In derselben Abbildung sind auch die einzelnen Komponenten des allgemeinen Verdrehungs- vektors für den Knoten  $i$  durch Doppelpfeile angedeutet, und zwar die Verdrehung  $\psi_i$  um die Lotrechte,  $\chi_i$  um die Tangente und  $\omega_i$  um den Radius, stets positiv, wenn um die Pfeilachse im Sinn einer Rechtsschraube drehend. Die zur Erzeugung bzw. Erhaltung dieser Verdrehungen an den Knoten angreifenden Momente sind dort ebenfalls mit denselben Vorzeichenregeln eingetragen.

Gemäß den obigen Voraussetzungen werden die lotrechten Knotenpunktslasten zur Gänze von den Stielen aufgenommen, so daß das Tragwerk nur für die waagrechten (Wind-) Lasten zu untersuchen ist. Entsprechend den in der Praxis stets vorliegenden Verhältnissen nehmen wir an, daß diese Lasten eine lotrechte Symmetrieebene aufweisen, die wir zum Ausgang der in der Abb. 1 eingeführten Bezifferung der Stäbe und Knoten wählen. Dementsprechend wird auch der Kraft- und der Verformungs- zustand des Systems zu dieser Ebene symmetrisch sein, so daß die gesamte Verformung der unbelastet gedachten Stäbe durch die Angabe der  $5n$  Verschiebungsgrößen  $u_i$ ,  $w_i$ ,  $\psi_i$ ,  $\chi_i$  und  $\omega_i$  ( $i$  von 1 bis  $n$ ) gegeben ist.

Es ist nun aber auch nicht notwendig, zur Angabe des Verformungszustandes diese Größen selbst heranzuziehen. Wir können vielmehr den tatsächlichen Verschiebungszustand als Summe hinreichend vieler Verschiebungsgruppen darstellen;

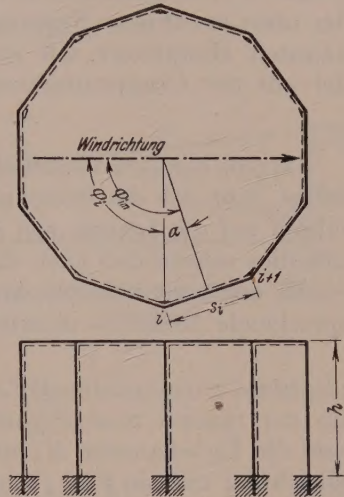


Abb. 1. Schema des Systems.

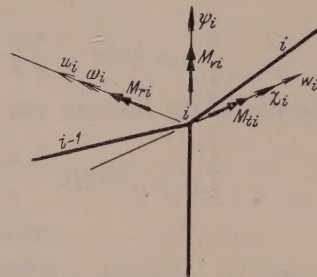


Abb. 2. Verschiebungen, Verdrehungen und Momente eines Knotenpunktes.



soll aus diesen Gruppen jeder mögliche Verformungszustand aufgebaut werden können, so müssen sie nur voneinander linear unabhängig sein. Im vorliegenden Fall eines Tragwerkes mit zyklischer Symmetrie ist es aber überdies möglich, die Einzelzustände zueinander orthogonal zu gestalten, so daß also das dem einen zugehörige Kraftsystem auf dem Verschiebungsweg des anderen keine Arbeit leistet. Dies gestattet uns aber, die Einzelzustände vollständig unabhängig voneinander zu untersuchen und erst zum Schluß in geeigneter Weise miteinander zu überlagern. Wir erreichen die angestrebte Orthogonalität dadurch, daß wir in jeder Gruppe — unter Berücksichtigung der oben erwähnten Symmetrie — die Verschiebungen als Produkt aus einem unbekannten Hauptwert mit einer sin- bzw. cos-Funktion ansetzen, deren Argument der mit der Gruppennummer  $k$  vervielfachte Positionswinkel ist, also z. B.

$$u_i = \bar{u}_k \cos k \varphi_i.$$

Da jede einzelne Verschiebungsgruppe für sich ein System von nur fünf Gleichungen liefert, läßt sich die Berechnung des 6  $n$ -fach statisch unbestimmten Systems zurückführen auf die Lösung von  $n$  Gleichungssystemen zu je 5 Gleichungen. Es wird sich überdies zeigen, daß auch diese Systeme weiter zerfallen.

Es erscheint nun zweckmäßig, auch die vorgelegte Belastung sofort in eine entsprechende Reihe zu entwickeln:

$$H_i = \sum_{k=1}^n \bar{H}_k \sin k \varphi_{i m} \quad (i = 1 \text{ bis } n) \quad (2.1)$$

und die Unbekannten  $\bar{H}_k$  zu bestimmen. Hierzu multiplizieren wir beide Seiten der Gleichung mit  $\sin k' \varphi_{i m}$  und addieren die so erhaltenen Gleichungen

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n H_i \sin k \varphi_{i m} &= \sum_{i=1}^n \sin k' \varphi_{i m} \cdot \sum_{k=1}^n \bar{H}_k \sin k \varphi_{i m} \\ &= \sum_{k=1}^n \bar{H}_k \sum_{i=1}^n \sin k' \varphi_{i m} \sin k \varphi_{i m}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Da die letzte Summe nur für  $k' = k$  existiert, so folgt

$$\bar{H}_k = \frac{\sum_{i=1}^n H_i \sin k \varphi_{i m}}{\sum_{i=1}^n \sin^2 k \varphi_{i m}}. \quad (2.3)$$

Damit sind die den Verschiebungsgruppen zugeordneten Lastgruppen leicht zu bestimmen. Die von Luetkens eingeführten, oben allgemein abgeleiteten Lastgruppen stellen nur einen Sonderfall der für den von ihm betrachteten achteckigen Kamin-kühlerunterbau dar. Aus der dortigen Ableitung geht nicht der Grund für die von ihm gewählten Verhältnisse der Gruppenlasten hervor; es ist aber ohne weiteres ersichtlich, daß sie nichts anderes als die Reihen  $\sin k \varphi_{i m}$  für  $k = 1$  bis 4 darstellen.

### 3. Die Verformungsgruppen.

Wie schon dargelegt, wollen wir die Verschiebungen der Knotenpunkte derart zu Gruppen zusammenfassen, daß sie innerhalb jeder Gruppe einem Sinus- bzw. Cosinus-Ansatz gehorchen. Damit sind innerhalb jeder Gruppe die einzelnen Verschiebungen durch Angabe des jeweiligen Scheitelwertes vorgegeben und es sind nur mehr Beziehungen zwischen den fünf Scheitelwerten der in Frage kommenden Verschiebungen zu suchen. Ausgehend von den Radialverschiebungen läßt sich zeigen, daß die zugehörigen tangentialen Verrückungen der Knotenpunkte aus der geometrischen Bedingung der unveränderten Riegeellänge folgen, während die drei Ver-



drehungskomponenten der Knoten aus den Gleichungen für das Momentengleichgewicht der Knoten zu errechnen sind.

Mit dem Ansatz

$$u_i = \bar{u}_k \cos k \varphi_i \quad (3.1)$$

und

$$w_i = \bar{w}_k \sin k \varphi_i \quad (3.2)$$

ergibt sich aus der nach Abb. 3 abzuleitenden Bedingung der unveränderlichen Riegellänge

$$s_i' - s_i = (w_{i+1} - w_i) \cos \alpha - (u_{i+1} + u_i) \sin \alpha = 0$$

die Beziehung

$$\bar{w}_k = \bar{u}_k \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} k \alpha} \quad (3.3)$$

Für die Komponenten der Knotendrehungen machen wir entsprechend der Symmetrie des Belastungs- und Verformungszustandes die Ansätze

$$\psi_i = \bar{\psi}_k \sin k \varphi_i, \quad (3.4)$$

$$\chi_i = \bar{\chi}_k \cos k \varphi_i, \quad (3.5)$$

$$\omega_i = \bar{\omega}_k \sin k \varphi_i. \quad (3.6)$$

Nun hatten die Verschiebungen  $u$  und  $w$  den Riegelenden Verschiebungen  $y$  senkrecht zur Riegelachse auferlegt und damit Drehungen der Riegelachsen erzeugt um die Winkel

$$\frac{\Delta y_i}{s} = \frac{1}{s} [(u_{i+1} - u_i) \cos \alpha + (w_{i+1} + w_i) \sin \alpha]. \quad (3.7)$$

Wenn die Verschiebungen ohne Verdrehung der Knoten vor sich gehen sollten, so müßten in den Enden der Stäbe die Biegemomente

$$\left. \begin{aligned} M_{vi,i}' &= -M_{vi+1,i}' = -\frac{6 B_v}{s^2} \Delta y_i = \frac{12 B_v \bar{u}_k}{s^2} \cdot \frac{\sin^2 k \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos \alpha \sin k \alpha} \cdot \sin k \varphi_{i,m} \\ \text{bzw.} \\ -M_{vi-1,i-1}' &= M_{vi,i-1}' = +\frac{6 B_v}{s^2} \Delta y_{i-1} = - \\ &\quad -\frac{12 B_v \bar{u}_k}{s^2} \frac{\sin^2 k \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos \alpha \sin k \alpha} \cdot \sin k \varphi_{i-1,m} \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

tätig sein, also insgesamt am Knoten  $i$  ein Festhaltungsmoment

$$M_{vi}' = M_{vi,i}' - M_{vi,i-1}' = \frac{24 B_v \bar{u}_k}{s^2} \cdot \frac{\sin^2 k \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos \alpha \operatorname{tg} k \alpha} \cdot \sin k \varphi_i. \quad (3.9)$$

Die Verdrehungen  $\psi$  nach (3.4) wiederum bewirken auch Stabendmomente am Knoten  $i$ , und zwar im Stab  $i$  ein Biegemoment

$$\left. \begin{aligned} M_{vi,i}'' &= +\frac{B_v}{s} (4 \psi_i + 2 \psi_{i+1}), \\ \text{im Stab } i-1 \\ M_{vi,i-1}'' &= -\frac{B_v}{s} (4 \psi_i + 2 \psi_{i-1}), \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

und im Stiel  $i$  ein Torsionsmoment

$$T_{si} = +\frac{D_s}{h} \cdot \psi_i. \quad (3.11)$$

Sie erfordern also insgesamt ein Festhaltungsmoment

$$\begin{aligned} M_{vi}'' &= M_{vi,i}'' - M_{vi,i-1}'' + T_{si} \\ &= \bar{\psi}_k \left[ \frac{D_s}{h} + 4 \frac{B_v}{s} (2 + \cos 2 k \alpha) \right] \sin k \varphi_i. \end{aligned} \quad (3.12)$$

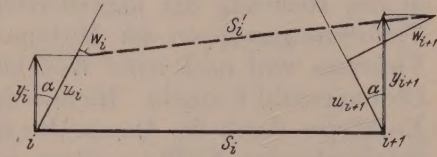


Abb. 3. Verschiebung eines Riegelstabes.



Da jedoch an den Knoten voraussetzungsgemäß keine äußeren Momente angreifen, müssen sich die aus (3. 9) und (3. 12) errechneten Festhaltungsmomente aufheben, woraus folgt

$$\bar{\psi}_k = - \frac{\bar{u}_k}{s} \cdot \frac{\sin^2 k \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos \alpha \operatorname{tg} k \alpha} \cdot \frac{24 h B_v}{s D_s + 4 h B_v (2 + \cos 2 k \alpha)}. \quad (3. 13)$$

Damit können mittels der Formeln (3. 8) bis (3. 11) sämtliche Biegemomente  $M_v$  der Riegel und die Verdrehungsmomente  $T_s$  der Stiele errechnet werden.

An dieser Stelle möge eine kurze Kennzeichnung der durch die obigen Ansätze bestimmten Formänderungen des Tragwerkes gegeben werden. Der Verformungsgruppe  $k = 1$  ist nach (3. 3) ein  $\bar{w}_1 = u_1$  zugeordnet sowie nach (3. 13)  $\psi_1 = 0$ . Dem entspricht also eine einfache Parallelverschiebung des unverformten Riegelkranzes in der Richtung der angreifenden Mittelkraft. Dagegen bleiben bei den höheren Verformungsgruppen der Mittelpunkt des Vieleckes in Ruhe und der Umkreis des Vieleckes wird nach einer Wellenlinie mit ebensoviel vollen Wellen verbogen als die Ordnungszahl  $k$  angibt. Hieraus folgt auch, daß die Ableitung der Mittelkraft in den Erdkörper durch die Querkkräfte in den Stielen vornehmlich durch die der Gruppe 1 entsprechenden Kräfte erfolgen wird, während — zumindest für „vernünftige“ Belastungen — der Anteil der höheren Gruppen immer kleiner werden wird. Dies wird sich auch in dem am Schluß vorgeführten Zahlenbeispiel zeigen.

Die Verschiebungen der Knoten wecken aber auch in den Stielen Biegemomente. Würden die Knoten sich nicht verdrehen, so entstünden

$$M_{ti} = \frac{6 B_t}{h^2} u_i \quad \text{und} \quad M_{ri} = \frac{6 B_r}{h^2} w_i,$$

wozu also in den Knotenpunkten die Festhaltungsmomente

$$M_{ti}' = + \frac{6 B_t}{h^2} \bar{u}_k \cos k \varphi_i, \quad M_{ri}' = - \frac{6 B_r}{h^2} \cdot \bar{u}_k \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} k \alpha} \cdot \sin k \varphi_i \quad (3. 14)$$

wirken müßten. Infolge der Nachgiebigkeit der Riegel werden sich jedoch die Knoten gemäß (3. 5) und (3. 6) verdrehen. Durch  $\chi_i$  entstehen (Abb. 4) die Verdrehungswinkel der anstoßenden Riegel

$$\chi_i \sin \alpha = \bar{\chi}_k \sin \alpha \cos k \varphi_i$$

und damit die Biegemomente

$$\left. \begin{aligned} M_{hi,i} &= - \frac{2 B_h}{s} (2 \chi_i - \chi_{i+1}) \sin \alpha, \\ M_{hi,i-1} &= - \frac{2 B_h}{s} (2 \chi_i - \chi_{i-1}) \sin \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (3. 15)$$

Gleichzeitig entsteht im Riegel  $i$  infolge der Verdrillung das Torsionsmoment

$$\left. \begin{aligned} T_{Ri} &= \frac{D_r}{s} (\chi_{i+1} - \chi_i) \cos \alpha \\ \text{und im Riegel } i-1 \\ T_{Ri-1} &= \frac{D_r}{s} (\chi_i - \chi_{i-1}) \cos \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (3. 16)$$

Endlich wirkt im Stiel  $i$  infolge der Verdrehung des Stielkopfes das Moment

$$M_{ti} = \frac{4 B_t}{h} \cdot \chi_i. \quad (3. 17)$$

Hieraus folgen die zur Erhaltung dieses Verformungszustandes notwendigen Festhaltungsmomente  $M_i''$  infolge der  $\chi_i$  zu

$$\begin{aligned} M_{ti}'' &= M_{ti} - (M_{hi,i} + M_{hi,i-1}) \sin \alpha - (T_{Ri} - T_{Ri-1}) \cos \alpha \\ &= 2 \bar{\chi}_k \left[ \frac{2 B_t}{h} + \frac{2 B_h}{s} \sin^2 \alpha (2 - \cos 2 k \alpha) + \frac{D_r}{s} \cos^2 \alpha (1 - \cos 2 k \alpha) \right] \cos k \varphi_i \end{aligned} \quad (3. 18a)$$



und

$$\begin{aligned} M_{ri}'' &= (M_{hi,i} - M_{hi,i-1}) \cos \alpha - (T_{Ri} + T_{Ri-1}) \sin \alpha \\ &= -2 \chi_k \left[ \frac{2 B_h}{s} - \frac{D_R}{s} \right] \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \sin 2 k \alpha \cdot \sin k \varphi_i. \end{aligned} \quad (3.18b)$$

In ähnlicher Weise ergeben die Verdrehungen der Stielköpfe  $\omega_i$  nach Abb. 5 die Verdrehungswinkel der Riegel zu

$$\omega_i \cos \alpha = \bar{\omega}_k \cos \alpha \cdot \sin k \varphi_i$$

und damit deren Biegemomente

$$\left. \begin{aligned} M_{hi,i} &= + \frac{2 B_h}{s} (2 \omega_i + \omega_{i+1}) \cos \alpha, \\ M_{hi,i-1} &= - \frac{2 B_h}{s} (2 \omega_i + \omega_{i-1}) \cos \alpha, \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

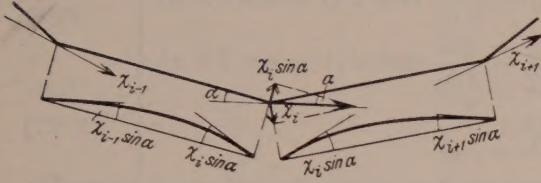


Abb. 4. Verformung infolge der  $\chi_i$ .

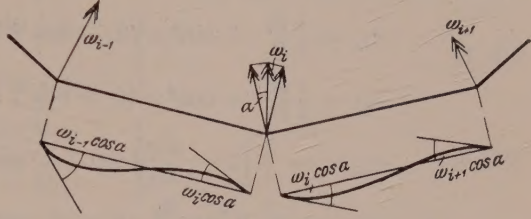


Abb. 5. Verformung infolge der  $\omega_i$ .

sowie die Torsionsmomente der Riegel mit

$$\left. \begin{aligned} T_{Ri} &= - \frac{D_R}{s} (\omega_i + \omega_{i+1}) \sin \alpha, \\ T_{Ri-1} &= - \frac{D_R}{s} (\omega_i + \omega_{i-1}) \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

und das Stielkopfmoment

$$M_{ri} = - \frac{4 B_r}{h} \omega_i. \quad (3.21)$$

Damit ergeben sich die Festhaltungsmomente infolge  $\omega$  zu

$$\begin{aligned} M_{ti}''' &= - (M_{hi,i} + M_{hi,i-1}) \sin \alpha - (T_{Ri} - T_{Ri-1}) \cos \alpha \\ &= -2 \bar{\omega}_k \left[ \frac{2 B_h}{s} - \frac{D_R}{s} \right] \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \sin 2 k \alpha \cdot \cos k \varphi_i \end{aligned} \quad (3.22a)$$

und

$$\begin{aligned} M_{ri}'''' &= -M_{ri} + (M_{hi,i} - M_{hi,i-1}) \cos \alpha - (T_{Ri} + T_{Ri-1}) \sin \alpha \\ &= 2 \bar{\omega}_k \left[ \frac{2 B_r}{h} + \frac{2 B_h}{s} \cos^2 \alpha (2 + \cos 2 k \alpha) + \frac{D_R}{s} \sin^2 \alpha (1 + \cos 2 k \alpha) \right] \sin k \varphi_i. \end{aligned} \quad (3.22b)$$

Das Momentengleichgewicht der Knoten um die Tangente und um den Radius bedingt

$$\left. \begin{aligned} M_{ti}' + M_{ti}'' + M_{ti}''' &= 0 \\ M_{ri}' + M_{ri}'' + M_{ri}''' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

oder ausgeschrieben nach Kürzung durch die allen Gliedern je einer Gleichung gemeinsamen Faktoren  $\cos k \varphi_i$  bzw.  $\sin k \varphi_i$



$$\left. \begin{aligned}
 & 3 \frac{B_t}{h} \cdot \frac{\bar{u}_k}{h} + \left[ \frac{2 B_t}{h} + \frac{2 B_h}{s} \sin^2 \alpha (2 - \cos 2 k \alpha) + \frac{D_R}{s} \cos^2 \alpha (1 - \cos 2 k \alpha) \right] \bar{\chi}_k - \\
 & - \left( \frac{2 B_h}{s} - \frac{D_R}{s} \right) \frac{\sin 2 \alpha}{2} \sin 2 k \alpha \bar{\omega}_k = 0 \\
 \text{und} \\
 & - 3 \frac{B_r}{h} \cdot \frac{\bar{u}_k}{h} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} k \alpha} - \left( \frac{2 B_h}{s} - \frac{D_R}{s} \right) \frac{\sin 2 \alpha}{2} \sin 2 k \alpha \bar{\chi}_k + \left[ \frac{2 B_r}{h} + \right. \\
 & \left. + \frac{2 B_h}{s} \cos^2 \alpha (2 + \cos 2 k \alpha) + \frac{D_R}{s} \sin^2 \alpha (1 + \cos 2 k \alpha) \right] \bar{\omega}_k = 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

Hieraus folgen

$$\bar{\chi}_k = \frac{a c_{22} - b c_{12}}{c_{11} c_{22} - c_{12}^2} \cdot \frac{\bar{u}_k}{h} \quad (3.25)$$

und

$$\bar{\omega}_k = \frac{b c_{11} - a c_{12}}{c_{11} c_{22} - c_{12}^2} \cdot \frac{u_k}{h}, \quad (3.26)$$

wenn zur Abkürzung die Bezeichnungen eingeführt werden:

$$\left. \begin{aligned}
 c_{11} &= \frac{s B_t}{h B_h} + \sin^2 \alpha (2 - \cos 2 k \alpha) + \frac{D_R}{2 B_h} \cos^2 \alpha (1 - \cos 2 k \alpha), \\
 c_{22} &= \frac{s B_r}{h B_h} + \cos^2 \alpha (2 + \cos 2 k \alpha) + \frac{D_R}{2 B_h} \sin^2 \alpha (1 + \cos 2 k \alpha), \\
 c_{12} &= -\frac{1}{4} \left( 2 - \frac{D_R}{B_h} \right) \sin 2 \alpha \cdot \sin 2 k \alpha, \\
 a &= -\frac{3}{2} \cdot \frac{s}{h} \cdot \frac{B_t}{B_h}, \\
 b &= \frac{3}{2} \cdot \frac{s}{h} \cdot \frac{B_r}{B_h} \operatorname{tg} k \alpha.
 \end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

Somit sind nun alle Formänderungsgrößen einer Gruppe auf den Wert  $\bar{u}_k$  zurückgeführt worden. Zu dessen Bestimmung benötigen wir noch die zur Erzielung des so beschriebenen Formänderungszustandes aufzubringenden Kräfte bzw. Belastungen.

Im Riegel  $i$  entstehen infolge der Verschiebungen  $u$  und  $w$  und der Verdrehungen  $\varphi$  Querkräfte  $Q_{vi}$  nach (3. 8) und (3. 10)

$$\begin{aligned}
 Q_{vi} &= \frac{M_{vi,i} - M_{vi+1,i}}{s} = \\
 &= + \frac{24 B_v \bar{u}_k}{s^3} \cdot \frac{\sin^2 k \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos \alpha \cdot \sin k \alpha} \cdot \sin k \varphi_{im} + \frac{6 B_v}{s^2} (\psi_i + \psi_{i+1}) \\
 &= \bar{Q}_{vk} \cdot \sin k \varphi_{im}
 \end{aligned} \quad (3.28)$$

mit

$$\bar{Q}_{vk} = \frac{24 B_v}{s^3} \cdot \frac{\sin^2 k \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos \alpha \cdot \sin k \alpha} \cdot \frac{s D_s + 2 h B_v (1 - \cos 2 k \alpha)}{s D_s + 4 h B_v (2 + \cos 2 k \alpha)} \cdot \bar{u}_k. \quad (3.29)$$

Diese Querkräfte der zwei im Knoten  $i$  zusammentreffenden Riegel  $i - 1$  und  $i$  setzen sich zu Radial- bzw. Tangentialkräften zusammen von der Größe

$$\begin{aligned}
 P_{ri} &= (Q_{v,i-1} - Q_{vi}) \cos \alpha \\
 &= \bar{P}_{rk} \cos k \varphi_i
 \end{aligned} \quad (3.30)$$

mit

$$\bar{P}_{rk} = -2 \bar{Q}_{vk} \cos \alpha \sin k \alpha \quad (3.31)$$

und

$$\begin{aligned}
 P_{ti} &= (Q_{vi-1} + Q_{vi}) \sin \alpha \\
 &= \bar{P}_{tk} \sin k \varphi_i
 \end{aligned} \quad (3.32)$$

mit

$$P_{tk} = 2 \bar{Q}_{vk} \sin \alpha \cos k \alpha. \quad (3.33)$$



Infolge der Verschiebungen  $u$  und  $w$  sowie der Verdrehungen  $\chi$  und  $\omega$  treten in den Stielen Querkräfte auf von der Größe

$$Q_{ti} = + \frac{12 B_t u_i}{h^3} + \frac{6 B_t \chi_i}{h^2} = \bar{Q}_{tk} \cos k \varphi_i, \quad (3.34)$$

wobei

$$\bar{Q}_{tk} = \frac{6 B_t}{h^3} (2 \bar{u}_k + \bar{\chi}_k h) \quad (3.35)$$

und

$$Q_{ri} = \frac{12 B_r w_i}{h^3} - \frac{6 B_r \omega_i}{h^2} = \bar{Q}_{rk} \sin k \varphi_i, \quad (3.36)$$

worin

$$\bar{Q}_{rk} = \frac{6 B_r}{h^3} (2 \bar{w}_k - \bar{\omega}_k h). \quad (3.37)$$

Diese Querkräfte vereinigen sich in den Knoten mit den oben berechneten Kräften  $P_{ti}$  und  $P_{ri}$  zu den Resultierenden

$$\left. \begin{aligned} R_{ti} &= \bar{R}_{tk} \sin k \varphi_i \\ R_{ri} &= \bar{R}_{rk} \cos k \varphi_i \end{aligned} \right\} \quad (3.38)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{R}_{tk} &= \bar{P}_{tk} - \bar{Q}_{rk} \\ \bar{R}_{rk} &= \bar{P}_{rk} - \bar{Q}_{tk} \end{aligned} \right\} \quad (3.39)$$

Hieraus folgt die erforderliche Belastung des Riegels durch Zerlegung der Knotenpunktslasten in die Richtungen der anstoßenden Riegelachsen zu

$$S_i = -\frac{1}{2} \left[ (R_{ti+1} + R_{ti}) \frac{1}{\cos \alpha} - (R_{ri+1} - R_{ri}) \frac{1}{\sin \alpha} \right]. \quad (3.40)$$

Dadurch ist auch die in (2. 1) aufgestellte Behauptung bewiesen, daß die der Gruppe  $k$  zugeordnete Belastung einem ähnlichen Gesetz folgt, indem

$$S_i = S_k \sin k \varphi_{im} \quad (3.41)$$

mit

$$\bar{S}_k = - \left( \bar{R}_{tk} \frac{\cos k \alpha}{\cos \alpha} + \bar{R}_{rk} \frac{\sin k \alpha}{\sin \alpha} \right). \quad (3.42)$$

Durch Vergleich der beiden Belastungen der Ordnung  $k$  folgt sofort die Größe von  $\bar{u}_k$ . Es ist daher für die praktische Berechnung zweckmäßig, zunächst den Wert  $\bar{u}_k = 1$  anzunehmen, die zugehörige Belastung zu ermitteln und am Schluß den Multiplikator  $X_k$  zu bestimmen, mit dem diese Gruppe zu vervielfachen ist, um die gegebene Belastung zu erreichen.

#### 4. Zahlenwerte.

In den im Abschnitt 3 aufgestellten Formeln treten verschiedene Ausdrücke auf, die nicht von den Systemmaßen (Stablängen und -steifigkeiten), sondern nur von der Eckenzahl  $n$  bzw. dem Winkel  $\alpha$  sowie von der Ordnungszahl  $k$  abhängen. Hier sollen also die betreffenden Formeln auf diese Hilfswerte zurückgeführt und dieselben in einer Tabelle mitgeteilt werden, um die Zahlenrechnung möglichst zu vereinfachen.

Die Gl. (3. 3) läßt sich schreiben

$$\bar{w}_k = k_w \cdot \bar{u}_k, \quad (4.1)$$

worin

$$k_w = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} k \alpha} \quad (4.2)$$

und aus der Tabelle für alle praktisch vorkommenden Werte von  $n$  und  $k$  zu entnehmen ist.



Formel (3. 13) gibt mit

$$k_s = \frac{s D_s}{h B_v}, \quad (4. 3)$$

$$\bar{\psi}_k = -\frac{\bar{u}_k}{s} \cdot k_v \cdot \frac{24}{k_s + 4(2 + \cos 2k\alpha)}, \quad (4. 4)$$

wofür

$$k_v = \frac{\sin^2 k\alpha - \sin^2 \alpha}{\cos \alpha \operatorname{tg} k\alpha} \quad \text{und} \quad 2 + \cos 2k\alpha \quad (4. 5)$$

in derselben Tabelle abzulesen sind.

Endlich können mit

$$k_t = \frac{s B_t}{h B_h}, \quad k_r = \frac{s B_r}{h B_k}, \quad k_R = \frac{D_R}{B_h} \quad (4. 6)$$

die Gl. (3. 27) geschrieben werden

$$\left. \begin{aligned} c_{11} &= k_t + m + k_R n, & c_{22} &= k_r + m' + k_R n', \\ c_{12} &= -(2 - k_R) l, \\ a &= -\frac{3}{2} k_t, & b &= \frac{3}{2} k_r k_w, \end{aligned} \right\} \quad (4. 7)$$

Tabelle 1.

2n	k	sin k α	k <sub>w</sub>	ψ		χ und ω				
				k <sub>ψ</sub>	2 + cos 2k α	m	n	l	m'	n'
4	1	0·7071	1·0000	0·0000	2·0000	1·0000	0·2500	0·2500	1·0000	0·2500
	2	1·0000	0·0000	0·0000	1·0000	1·5000	0·5000	0·0000	0·5000	0·0000
6	1	0·5000	1·0000	0·0000	2·5000	0·3750	0·1875	0·1875	1·8750	0·1875
	2	0·8660	0·3333	0·3333	1·5000	0·6250	0·5625	0·1875	1·1250	0·0625
	3	1·0000	0·0000	0·0000	1·0000	0·7500	0·7500	0·0000	0·7500	0·0000
8	1	0·3827	1·0000	0·0000	2·7071	0·1893	0·1250	0·1250	2·3170	0·1250
	2	0·7071	0·4142	0·3827	2·0000	0·2929	0·4268	0·1768	1·7071	0·0732
	3	0·9239	0·1716	0·3170	1·2929	0·3965	0·7286	0·1250	1·1036	0·0214
	4	1·0000	0·0000	0·0000	1·0000	0·4394	0·8536	0·0000	0·8536	0·0000
10	1	0·3090	1·0000	0·0000	2·8090	0·1137	0·0864	0·0864	2·5408	0·0864
	2	0·5878	0·4472	0·3618	2·3090	0·1615	0·3125	0·1398	2·0885	0·0625
	3	0·8090	0·2361	0·4271	1·6910	0·2205	0·5920	0·1398	1·5295	0·0330
	4	0·9511	0·1056	0·2764	1·1910	0·2682	0·8181	0·0864	1·0773	0·0091
	5	1·0000	0·0000	0·0000	1·0000	0·2865	0·9045	0·0000	0·9045	0·0000
12	1	0·2588	1·0000	0·0000	2·8660	0·0760	0·0625	0·0625	2·6740	0·0625
	2	0·5000	0·4641	0·3282	2·5000	0·1005	0·2332	0·1083	2·3325	0·0502
	3	0·7071	0·2680	0·4483	2·0000	0·1340	0·4665	0·1250	1·8660	0·0335
	4	0·8660	0·1547	0·4082	1·5000	0·1675	0·6998	0·1083	1·3995	0·0167
	5	0·9659	0·0718	0·2402	1·1340	0·1920	0·8705	0·0625	1·0580	0·0045
	6	1·0000	0·0000	0·0000	1·0000	0·2010	0·9330	0·0000	0·9330	0·0000
16	1	0·1951	1·0000	0·0000	2·9239	0·0410	0·0366	0·0366	2·8126	0·0366
	2	0·3827	0·4802	0·2668	2·7071	0·0492	0·1409	0·0676	2·6041	0·0325
	3	0·5556	0·2977	0·4129	2·3827	0·0616	0·2969	0·0884	2·2920	0·0263
	4	0·7071	0·1989	0·4710	2·0000	0·0761	0·4810	0·0957	1·9239	0·0190
	5	0·8315	0·1329	0·4451	1·6173	0·0907	0·6650	0·0884	1·5558	0·0118
	6	0·9239	0·0824	0·3444	1·2929	0·1030	0·8211	0·0676	1·2437	0·0056
	7	0·9808	0·0396	0·1874	1·0761	0·1113	0·9253	0·0366	1·0352	0·0014
	8	1·0000	0·0000	0·0000	1·0000	0·1142	0·9619	0·0000	0·9619	0·0000



wenn unter

$$\left. \begin{aligned} m &= \sin^2 \alpha (2 - \cos 2 k \alpha), & n &= \frac{1}{2} \cos^2 \alpha (1 - \cos 2 k \alpha), \\ m' &= \cos^2 \alpha (2 + \cos 2 k \alpha), & n' &= \frac{1}{2} \sin^2 \alpha (1 + \cos 2 k \alpha), \\ l &= \frac{1}{4} \sin 2 \alpha \cdot \sin 2 k \alpha \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

verstanden werden, welche Größen ebenfalls der Tabelle entnommen werden können.

### 5. Zahlenbeispiel.

Zur Erläuterung der Ableitung und der Anwendung der Tabelle wird ein zehneckiges Stahlbeton-Kühlturmfundament von folgenden Abmessungen und Belastungen untersucht: Die Länge eines Riegels betrage  $s = 6.00$  m, die Stielhöhe  $h = 10.00$  m. Die Steifigkeiten des Stieles (je Meter) sind  $B_t = 78000$  tm<sup>2</sup>,  $B_r = 36000$  tm<sup>2</sup>,  $D_s = 18000$  tm<sup>2</sup>, jene des Riegels  $B_v = 54000$  tm<sup>2</sup>,  $B_h = 30000$  tm<sup>2</sup>,  $D_R = 15000$  tm<sup>2</sup>. Die Belastung ist gegeben durch in Richtung der jeweiligen Riegelachsen wirkende Kräfte von den Größen  $H_1 = 4.00$  t,  $H_2 = 15.00$  t,  $H_3 = 7.00$  t,  $H_4 = 0.00$  t. Die entsprechenden Riegel der linken Tragwerkshälfte erhalten die gleichen Kräfte. Zur Vereinfachung der Berechnung der Gruppenlastwerte benutzen wir die Tatsache, daß die Lastgruppen 2 und 4 in bezug auf die zweite Symmetrieachse des Tragwerkes symmetrisch, dagegen die Gruppen 1 und 3 antimetrisch sind. Daher zerlegen wir die Gesamtbelastung in einen Teil mit den der Reihe nach wirkenden Kräften 2.00; 11.00; 11.00; 2.00 und einen mit 2.00; 4.00; — 4.00; — 2.00. Ersichtlicherweise gibt die Summe dieser beiden Belastungen das vorgeschriebene Belastungsbild.

Die Berechnung der Scheitelwerte  $\bar{H}_1$  bis  $\bar{H}_4$  zu der vorgegebenen Belastung erfolgt nach (2.3) vorteilhaft tabellarisch; ihre Ergebnisse  $\bar{H}_1 = +9.31$  t,  $\bar{H}_2 = +3.40$  t,  $\bar{H}_3 = -3.64$  t und  $H_4 = -2.10$  t vermögen die oben gegebenen Kräfte voll zu vertreten. Schon hier ist durch das mit höherem  $k$  zu bemerkende Absinken der Absolutwerte das Überwiegen der ersten Verformungsgruppe erkennbar.

Für die weitere Berechnung benötigen wir noch die kennzeichnenden Steifigkeitswerte der Stäbe, die nach (4.3) und (4.6) zu ermitteln sind; sie liefern  $k_s = 0.20$ ,  $k_t = 1.56$ ,  $k_r = 0.72$  und  $k_R = 0.50$ . Damit ist nun jede einzelne Gruppe für sich zu behandeln. Der Vorgang sei am Beispiel der dritten Gruppe dargelegt. Nach Tab. 1 folgt aus der willkürlichen Annahme  $\bar{u}_3 = 1$  ein  $\bar{w}_3 = 0.2361$  sowie aus (4.4) ein  $\bar{\psi}_3 = -0.245$  m<sup>-1</sup>. Vermittels der Hilfswerte aus (4.7) folgen  $\bar{\chi}_3 = -0.1126$  m<sup>-1</sup> und  $\bar{\omega}_3 = +0.000844$  m<sup>-1</sup>, wodurch die gesamte Verformung dieser Gruppe beschrieben ist und über  $Q_{v3} = +1762$  t/m [nach (3.29)] die Kräfte  $\bar{P}_{r3} = -2712$  t/m und  $\bar{P}_{t3} = +640$  t/m ergibt. In ähnlicher Weise liefern (3.35) und (3.37)  $\bar{Q}_{t3} = +409$  t/m und  $\bar{Q}_{r3} = +100$  t/m. Die nach (3.39) zusammengesetzten  $\bar{R}_{t3} = +540$  t/m und  $\bar{R}_{r3} = -3121$  t/m ergeben endlich die Größe  $\bar{S}_3 = +7831$  t/m als Scheitelwert jener Belastung, die eine Verformung von dem angenommenen Maß erzeugen würde. Der Vergleich mit der tatsächlich wirksamen Belastung  $\bar{H}_3 = -3.64$  t gibt den Wert von  $X_3 = -0.000465$  m, mit dem Verformungen und Schnittkräfte dieser Gruppe zu vervielfachen sind. Ähnlich ist bei den anderen Gruppen vorzugehen, so daß die Gesamtverrückungen aller Punkte als Summe der mit dem jeweiligen  $X_k$  multiplizierten Gruppenverschiebungen nach (3.1) bis (3.6) bestimmt werden.



Aus diesen Verschiebungen sind die Schnittkräfte, insbesondere die Bieigungs- und Torsionsmomente, nach den in Abschnitt 3 mitgeteilten allgemeinen Formeln zu ermitteln; so folgt z. B. das Torsionsmoment im Stiel 2 nach (3. 11) mit

$$T_{s2} = \frac{D_s}{h} \psi_2 = \frac{18000}{10.00} \cdot \frac{-0.286}{1000} = -0,52^{mt}.$$

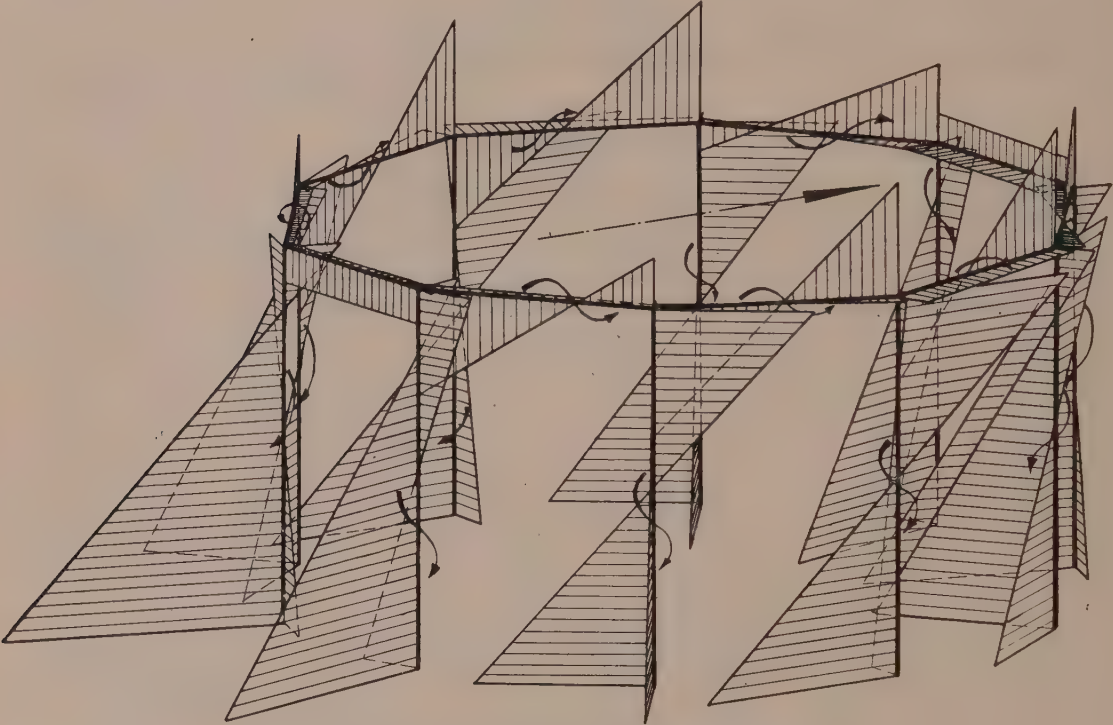


Abb. 6. Momentenbild des Gesamtsystems.

Damit ergeben sich die folgenden Schnittmomente in mt:

Stiel-Nr.:		1	2	3	4	5
Stielfuß:	$M_r$	— 9·25	— 23·52	— 27·06	— 19·78	— 6·99
	$M_t$	— 37·51	— 20·48	+ 6·19	+ 23·70	+ 28·09
Torsionsmoment:	$T_s$	— 0·16	— 0·52	— 0·20	+ 0·64	+ 0·48
Stielkopf:	$M_r$	+ 8·34	+ 21·22	+ 24·35	+ 17·72	+ 6·22
	$M_t$	+ 7·46	+ 4·05	— 1·87	— 4·93	— 4·70
Riegel links des Stieles:	$M_h$	+ 4·85	— 6·74	— 15·19	— 15·68	— 10·32
	$M_v$	+ 1·48	+ 2·09	— 5·73	— 2·97	+ 5·28
Riegel rechts des Stieles:	$M_h$	+ 14·10	+ 17·06	+ 11·93	+ 3·68	— 3·63
	$M_v$	+ 1·64	+ 2·61	— 5·53	— 3·61	+ 4·80
Torsionsmoment:	$T_R$	+ 1·74	+ 2·63	+ 1·71	+ 0·40	0

In Abb. 6 sind die Bieigungsmomentenflächen der einzelnen Stäbe in axonometrischer Darstellung wiedergegeben und die Torsionsmomente durch Andeutung des Verlaufs der verformten Erzeugenden eingezeichnet. Sämtliche Berechnungen erfolgten mit Rechenschiebergengenauigkeit und wurden am Schluß dadurch überprüft, daß an allen Knoten die Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen der Formänderungen aufgestellt wurden.



In obigem Beispiel trat die in der Tab. 1 angeführte Verformungsgruppe  $k = 5$ , allgemein  $k = n$ , nicht auf, da für alle Riegelstäbe  $\sin n \varphi_{im} = 0$  ist. Dies gilt aber nur für die hier vorausgesetzte Belastungsrichtung; bei einer Belastung, deren Symmetrieebene eine Diagonale des Riegelvielecks bildet, ist also diese Verformungsgruppe mitzunehmen.

### Schlußbemerkungen.

Wie schon eingangs erwähnt, wurden hier zur Erhöhung der Deutlichkeit konstante Trägheitsmomente vorausgesetzt; die Berücksichtigung veränderlicher Steifigkeit der Riegel hätte lediglich Verallgemeinerungen der Ausdrücke (3. 8) und (3. 10) bzw. (3. 15), (3. 16), (3. 19) und (3. 20) und der hieraus folgenden nach sich gezogen, jene einer veränderlichen Steifigkeit der Stiele eine solche der Formeln (3. 11), (3. 14), (3. 17) und (3. 21) und damit der hiervon abgeleiteten, ohne daß hierdurch der Hauptvorteil des vorgeführten Verfahrens, die Möglichkeit, die ganze Berechnung auf die kleiner Gruppen zurückzuführen, verlorenginge.

Auch angreifende äußere Momente bringen keine wesentliche Vergrößerung der zu leistenden Arbeit; einerseits sind sie ebenso wie die angreifenden Kräfte nach einer analogen Reihe zu (2. 1) zu entwickeln, anderseits sind entsprechende Glieder in die Gleichgewichtsbedingungen der Knoten (3. 12) und (3. 23) hineinzunehmen.

Um endlich auch den praktisch kaum auftretenden Fall einer antimetrischen Belastung zu behandeln, ist es nur notwendig, in den Ansätzen für die Formänderungen (3. 1) bis (3. 6) die  $\cos$ - durch  $\sin$ -Ausdrücke und umgekehrt zu ersetzen, wodurch nur unwesentliche Änderungen bewirkt werden; so bleibt die aus der Unveränderlichkeit der Riegellänge abgeleitete Beziehung (3. 3) erhalten.

(Eingegangen am 20. November 1946.)

## Störungsrechnung elektromagnetischer Hohlräume bei mehrfachem Eigenwert.

Von E. Ledinegg, Graz.

**Zusammenfassung.** Auf Grund der Störungsrechnung werden im folgenden die Aufspaltungsfrequenzen (so wie die sich daraus ergebenden Zwischenfrequenzen) eines Hohlraumes berechnet, dessen Entartungszustand durch eine kleine Deformation der Hüllfläche aufgehoben wurde. Die Kenntnis der entstehenden Zwischenfrequenzen ist, abgesehen vom rein theoretischen Interesse, auch für praktische Probleme der Hochfrequenztechnik (z. B. für den Verstärkerbau im cm-Wellengebiet) von Bedeutung.

**Summary.** Based upon the perturbation theory, the split-frequencies, as well as the resulting intermediate frequencies of a electromagnetic cavity whose state of degeneration has been nullified by a small deformation in the enveloping surface, are calculated in the following paper. The knowledge of the intermediate frequencies is important not only for purely theoretical considerations, but also for such practical matters as high-frequency technique (construction of amplifiers in cm-wave region).

**Résumé.** En se basant sur le calcul des perturbations, on a calculé dans ce qui suit les fréquences partielles, — et les fréquences intermédiaires qui en résultent, — d'une cavité, dont l'état de dégénération a pu être supprimé grâce à une petite déformation de la surface enveloppe. La connaissance de ces fréquences intermédiaires n'est pas seulement intéressante du point de vue purement théorique, mais est encore importante pour les problèmes d'application à la technique des courants de haute-fréquence (dans la construction des amplificateurs pour ondes centimétriques par exemple).

### 1. Einleitung.

Bekanntlich besitzt ein verlustfreier elektromagnetischer Hohlraum ein unendliches diskretes Spektrum von Eigenfrequenzen mit ein- oder mehrfacher Multiplizität.

Die dazugehörigen Eigenfunktionen  $\{\mathfrak{E}_\nu, \mathfrak{H}_\nu\}$  genügen den Maxwell'schen Gleichungen mit der Randbedingung  $\mathfrak{E}_t = 0$ . Wird die Hüllfläche infinitesimal deformiert, so erhält man bei einfacher Multiplizität der Eigenwerte für deren Änderung nach J. Müller<sup>1</sup> den Ausdruck:

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = \frac{\Delta A}{W} \text{ mit } \left\{ \begin{array}{l} \Delta A = \int_V \{\varepsilon(\mathfrak{E}, \mathfrak{E}^*) - \mu(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}^*)\} d\tau \\ W = 2 \int_V \varepsilon(\mathfrak{E}, \mathfrak{E}^*) d\tau \end{array} \right\} \quad (1)$$

(dabei bedeuten  $\omega = 2\pi\nu$  = Kreisfrequenz;  $\varepsilon, \mu$  = Dielektrizitätskonstante und Permeabilität in praktischen Einheiten;  $\mathfrak{E}, \mathfrak{H}$  bzw.  $\mathfrak{E}^*, \mathfrak{H}^*$  = elektrische und magnetische Feldstärke, bzw. die dazu konjugiert komplexen Werte; ferner wird mit  $V$  das Hohlraumvolumen bezeichnet). Im folgenden wird der allgemeine Fall einer  $n$ -fachen Entartung behandelt und die entsprechenden Aufspaltungsfrequenzen eines beliebig deformierten Hohlraumes auf Grund der Störungsrechnung berechnet. Eine auf Plausibilitätsbetrachtungen gestützte Rechnung von Müller<sup>1</sup> über die Aufspaltung eines zweifachen Eigenwertes durch Einführung einer kleinen Metallkugel in einen Hohlraum kann auf Grund der hier durchgeführten strengen Rechnung verschärft bzw. richtiggestellt werden.

## 2. Der Fall $n$ -facher Entartung.

In einer früheren Arbeit<sup>2</sup> wurde u. a. die Störungsrechnung der vektoriellen Wellengleichung unter der Annahme einfacher Eigenwerte und expliziten Auftretens der „Störung“ in der Randbedingung durchgeführt. Die dabei angestellte Rechnung kann auf den jetzt vorliegenden Fall übertragen werden, wobei nur zu beachten ist, daß im allgemeinen die  $n$  Eigenfunktionen  $\mathfrak{E}_\nu$  ( $\nu = 1, 2 \dots n$ ) des ungestörten Hohlraumes nicht stetig in jene des deformierten Hohlraumes übergehen, sondern daß der stetige Übergang nur für die zugeordnete lineare Schar gilt. Demgemäß ist hier die Wellengleichung

$$\text{rot rot } \mathfrak{E}_k - \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \mathfrak{E}_k = 0 \quad (2)$$

mit

$$\mathfrak{E}_k = \sum_{\nu=1}^n \alpha_{k,\nu} \mathfrak{E}_\nu; \quad (k = 1 \dots n) \quad (3)$$

zu variieren, wobei die  $\alpha_{\nu,k}$  noch passend bestimmt werden müssen. Da bei der Deformation nach dem Früheren  $\mathfrak{E}_k$  stetig in  $\mathfrak{E}_k + \delta\mathfrak{E}_k$  übergeht, erhält man aus (2) die  $n$ -Gleichungen

$$\text{rot rot } \delta\mathfrak{E}_k - \omega_0^2 \varepsilon_0 \mu_0 \delta\mathfrak{E}_k = 2 \omega_0 \varepsilon_0 \mu_0 \delta\omega \mathfrak{E}_k. \quad (4)$$

Nach Multiplikation mit  $\mathfrak{E}_\nu$  und Integration über das gestörte Hohlraumvolumen ergeben sich folgende  $n^2$ -Gleichungen:<sup>3</sup>

$$\int_V \{(\mathfrak{E}_\nu \text{ rot rot } \delta\mathfrak{E}_k) - (\delta\mathfrak{E}_k \text{ rot rot } \mathfrak{E}_\nu)\} d\tau = 2 \omega_0 \delta\omega \varepsilon_0 \mu_0 \int_V (\mathfrak{E}_\nu, \mathfrak{E}_k) d\tau. \quad (5)$$

Benützt man die Identität

$$(\mathfrak{E}_\nu \text{ rot rot } \delta\mathfrak{E}_k) - (\delta\mathfrak{E}_k \text{ rot rot } \mathfrak{E}_\nu) = \text{div} \{[\text{rot } \delta\mathfrak{E}_k, \mathfrak{E}_\nu] - [\text{rot } \mathfrak{E}_\nu, \delta\mathfrak{E}_k]\}$$

<sup>1</sup> J. Müller: Hochfrequenztechn. u. Elektroakust. 54, 157 (1939).

<sup>2</sup> E. Ledinegg: Zur Störungsrechnung elektromagnetischer Hohlräume mit einigen Anwendungen auf die experimentelle Bestimmung der DK. im Zentimeter-Wellengebiet. (Wird im Österr. Ing.-Arch. erscheinen.)

<sup>3</sup> Mit  $F_0, V_0$  bzw.  $F, V$  wird die Oberfläche und das Volumen des Hohlraumes vor bzw. nach der Deformation bezeichnet, während  $\Delta V = V - V_0$  das durch die Deformation des Hohlraumes „verdrängte“ Volumen angibt.



und wendet den Gaußschen Satz an, so erhält man das Gleichungssystem

$$\oint_F \{ [\text{rot } \delta \mathfrak{E}_k, \mathfrak{E}_v] - [\text{rot } \mathfrak{E}_v, \delta \mathfrak{E}_k] \}_n df = 2 \omega_0 \delta \omega \varepsilon_0 \mu_0 \int_V (\mathfrak{E}_v, \mathfrak{E}_k) d\tau,$$

welches bei Einführung von

$$\delta \mathfrak{E}_k = \bar{\mathfrak{E}}_k - \mathfrak{E}_k$$

unter Beachtung der Randbedingungen

$$F: [\bar{\mathfrak{E}}_k, n_F] = 0$$

$$F_0: [\mathfrak{E}_k, n_{F_0}] = [\mathfrak{E}_v, n_{F_0}] = 0$$

und unter nochmaliger Anwendung des Gaußschen Satzes (s. Fußnote 2) in

$$\int_{AV} \text{div} \{ [\text{rot } \delta \mathfrak{E}_k, \mathfrak{E}_v] + [\text{rot } \mathfrak{E}_v, \mathfrak{E}_k] \} d\tau = 2 \omega_0 \delta \omega \varepsilon_0 \mu_0 \int_V (\mathfrak{E}_v, \mathfrak{E}_k) d\tau$$

$$\left. \begin{array}{l} v = 1, 2, \dots, n \\ k = 1, 2, \dots, n \end{array} \right\}$$

übergeht. Da der erste Divergenzausdruck im linksstehenden Integral klein von 2. Ordnung und daher zu streichen ist — es wird entsprechendes Verhalten der Deformation vorausgesetzt —, bekommt man das System

$$\int_{AV} \text{div} [\text{rot } \mathfrak{E}_v, \mathfrak{E}_k] d\tau = 2 \omega_0 \delta \omega \varepsilon_0 \mu_0 \int_V (\mathfrak{E}_v, \mathfrak{E}_k) d\tau. \quad (6)$$

Die angeführten Gleichungen enthalten nicht mehr Feldgrößen des gestörten Hohlraumes, was mit den bisherigen Umformungen bezweckt wurde. Führt man die zu  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  komplex-konjugierten Vektoren  $\mathfrak{E}^*$ ,  $\mathfrak{H}^*$  ein, so läßt sich (6) mittels der Maxwellischen Gleichungen in eine zu (1) analoge Form umschreiben:

$$\int_{AV} \{ \varepsilon_0 (\mathfrak{E}_k, \mathfrak{E}_v^*) - \mu_0 (\mathfrak{H}_k, \mathfrak{H}_v^*) \} d\tau = \frac{2 \delta \omega}{\omega_0} \int_V \varepsilon_0 (\mathfrak{E}_v, \mathfrak{E}_k^*) d\tau. \quad (6')$$

Um nunmehr die unbekannten Koeffizienten  $\alpha_{k,v}$  sowie die Aufspaltungsfrequenzen auszurechnen, wird Gl. (3) in (6) eingesetzt. Damit ergeben sich die in (6) vorkommenden Integrale als lineare Aggregate der  $\alpha_{k,v}$ . Es ist

$$\left. \begin{array}{l} 2 \int_V \varepsilon_0 (\mathfrak{E}_v, \mathfrak{E}_k^*) d\tau = \sum_{p=1}^n \alpha_{k,p} W_{v,p}, \\ \int_{AV} \{ \varepsilon_0 (\mathfrak{E}_v, \mathfrak{E}_k^*) - \mu_0 (\mathfrak{H}_v, \mathfrak{H}_k^*) \} d\tau = \sum_{p=1}^n \alpha_{k,p} A_{v,p} \end{array} \right\} \quad (7)$$

mit

$$\left. \begin{array}{l} W_{v,p} = 2 \int_V \varepsilon_0 (\mathfrak{E}_v, \mathfrak{E}_p^*) d\tau, \\ A_{v,p} = \int_{AV} \{ \varepsilon_0 (\mathfrak{E}_v, \mathfrak{E}_p^*) - \mu_0 (\mathfrak{H}_v, \mathfrak{H}_p^*) \} d\tau. \end{array} \right\}$$

(6) geht demnach in folgendes in den  $\alpha_{k,p}$  lineares homogenes Gleichungssystem über:<sup>4</sup>

$$\sum_{p=1}^n \alpha_{k,p} (A_{v,p} - \delta \omega / \omega_0 W_{v,p}) = 0; \quad \left. \begin{array}{l} (v = 1, 2, \dots, n), \\ (k = 1, 2, \dots, n), \end{array} \right\} \quad (8)$$

wobei noch die aus (7) sich ergebenden Symmetriebedingungen

$$\left. \begin{array}{l} W_{v,p} = W_{p,v} \\ A_{v,p} = A_{p,v} \end{array} \right\} \quad (9)$$

gelten. Das Nullsetzen der Systemdeterminante von (8) liefert die Bestimmungsgleichung für die

<sup>4</sup> Das aus  $n^2$  Gleichungen bestehende System (8) zerfällt in  $n$  miteinander identische Systeme von je  $n$  Gleichungen, welche durch  $k = 1, 2$  usw. charakterisiert sind.

$$\begin{vmatrix} A_{1,1} - \delta\omega' W_{1,1} & A_{1,2} - \delta\omega' W_{1,2} & \dots & A_{1,n} - \delta\omega' W_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{v,1} - \delta\omega' W_{v,1} & A_{v,2} - \delta\omega' W_{v,2} & \dots & A_{v,n} - \delta\omega' W_{v,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} - \delta\omega' W_{n,1} & A_{n,2} - \delta\omega' W_{n,2} & \dots & A_{n,n} - \delta\omega' W_{n,n} \end{vmatrix} = 0. \quad (10)$$

Die  $n$ -Wurzeln dieser der Säkulargleichung nahe verwandten Gleichung ergeben die gewünschten Aufspaltungsfrequenzen. Für das Folgende wird, um Weitschweifigkeiten zu vermeiden, der Rang  $r$  der Determinante (10)

$$r = n - 1 \quad (10')$$

vorausgesetzt. Sollte  $r < n - 1$  sein, so wird davon nur die Eindeutigkeit des Fundamentalsystems (11), nicht aber dessen Existenz bzw. Realität betroffen.

Als Fundamentalsystem sollen die  $n$ -Eigenfunktionen  $\mathfrak{E}_k^{(F)} = \sum_{p=1}^n \alpha_{k,p} \mathfrak{E}_p$  bezeichnet werden. Die  $\alpha_{k,p}$  ergeben sich bis auf einen gemeinsamen Anregungsfaktor  $C_k$  nach (8) und (10) zu:

$$\alpha_{k,p} = \Delta_p (\delta\omega_k') = (-1)^{p-1} \begin{vmatrix} A_{2,1} - \delta\omega_k' W_{2,1} & \dots & A_{2,p-1} - \delta\omega_k' W_{2,p-1} & A_{2,p+1} - \delta\omega_k' W_{2,p+1} & \dots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \\ A_{n,1} - \delta\omega_k' W_{n,1} & \dots & A_{n,p-1} - \delta\omega_k' W_{n,p-1} & A_{n,p+1} - \delta\omega_k' W_{n,p+1} & \dots \end{vmatrix} \quad (11)$$

und sind die algebraischen Komplemente der Elemente der ersten Zeile von (10), wobei  $\delta\omega_k'$  die  $k$ -te Wurzel [auf Grund von (10') sind alle Wurzeln verschieden] von (10) bedeutet. Die Eigenfunktionen des Fundamentalsystems haben nach dem Vorhergegangenen die Eigenschaft, stetig in die Eigenfunktionen des deformierten Körpers überzugehen. Die notwendige und hinreichende Bedingung dazu ist das Verschwinden der wechselseitigen Arbeits- und Energieterme  $A_{i,k}$ ,  $W_{i,k}$ . Das Fundamentalsystem ist demnach zum Unterschied aller anderen Systeme der linearen Schar als „entkoppelt“ zu bezeichnen. (10) geht in die einfache Gestalt

$$\begin{vmatrix} A_{1,1} - \delta\omega' W_{1,1} & & & 0 \\ & 0 & & \\ & A_{2,2} - \delta\omega' W_{2,2} & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & A_{n,n} - \delta\omega' W_{n,n} \end{vmatrix} = \prod_k (A_{k,k} - \delta\omega' W_{k,k}) = 0 \quad (12)$$

über.

Dies läßt sich auch direkt, analog den entsprechenden Sätzen der Säkulargleichung, unter Zuhilfenahme von (9) beweisen. Dazu seien die Matrizen  $(A_{i,k})$  bzw.  $(W_{i,k})$  mit  $A$  bzw.  $W$  bezeichnet, während  $\mathfrak{x}$ ,  $\mathfrak{y}$ ,  $\mathfrak{z}$   $n$ -dimensionale Vektoren darstellen. Dann ist das Gleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} A \mathfrak{x} &= \mathfrak{y} \\ W \mathfrak{x} &= \mathfrak{z} \end{aligned} \right\} \mathfrak{y} = \delta\omega' \mathfrak{z} \quad (13)$$

äquivalent mit (8) und wird durch die Vektoren  $\mathfrak{x}_k$  ( $k = 1 \dots n$ ) mit

$$\mathfrak{x}_k = \{ \Delta_1 (\delta\omega_k'), \Delta_2 (\delta\omega_k'), \dots, \Delta_n (\delta\omega_k') \}$$

gelöst. Aus (13) folgen die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} (\mathfrak{y}_k, \mathfrak{x}_i) &= \delta\omega_k' (\mathfrak{z}_k, \mathfrak{x}_i), \\ (\mathfrak{y}_i, \mathfrak{x}_k) &= \delta\omega_i' (\mathfrak{z}_i, \mathfrak{x}_k). \end{aligned}$$



Da wegen (9)  $(\eta_k, \xi_i) = (\eta_i, \xi_k)$  ist, erhält man durch Subtraktion der beiden letzteren Gleichungen die Beziehung

$$\text{und analog} \quad \left. \begin{aligned} (\delta\omega_k' - \delta\omega_i') (\xi_k, \xi_i) &= 0 \\ (\delta\omega_k' - \delta\omega_i') (\eta_k, \xi_i) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Wegen (11) ist daraus

$$(\xi_k, \xi_i) = 0 \quad \text{und} \quad (\eta_k, \xi_i) = 0; \quad i \neq k. \quad (15)$$

Andererseits folgt aus der Forderung  $A_{i,k} = W_{i,k} = 0$  das Gleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} W_{i,k} &= \int_V (\xi_i, \xi_k^*) d\tau = \sum_{\nu, \mu} \alpha_{i,\nu} \alpha_{k,\mu} W_{\nu,\mu} = 0, \\ A_{i,k} &= \int_V \{ \epsilon_0 (\xi_i, \xi_k^*) - \mu_0 (\xi_i, \xi_k^*) \} d\tau = \sum_{\nu, \mu} \alpha_{i,\nu} \alpha_{k,\mu} A_{\nu,\mu} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

welches, wie man durch Einsetzen von (13) in das Gleichungssystem (15) sieht, mit diesem identisch ist. Damit ist der gewünschte Nachweis erbracht.

Aus (14) läßt sich auch die Realität der  $n$ -Aufspaltungsfrequenzen einfach beweisen. Sind  $\delta\omega_i'$ ,  $\delta\omega_k'$  konjugiert-komplexe Wurzeln von (10), so müssen auch  $\xi_i$ ,  $\xi_k$  zueinander konjugiert-komplex sein. (14) ergibt dann, wenn  $\delta\omega_i' = w_i + i \bar{w}_i$  gesetzt wird, die Gleichungen

$$\bar{w}_i \sum_{\nu, \mu} W_{\nu,\mu} \{ x_\nu^i x_\mu^{i*} + x_\mu^i x_\nu^{i*} \} = 2 w_i \sum_{\nu, \mu} W_{\nu,\mu} \cdot \text{Real.} (x_\nu^i x_\mu^{i*}) = 0.$$

Da wegen der durchführbaren Orthogonalisierung der  $\{\xi_\nu\}$ ,  $(W, \xi) \xi$  positiv definit ist, folgt daraus  $\bar{w}_i = 0$ .<sup>5</sup>

Unter der Voraussetzung (10') lassen sich die bisherigen Ergebnisse folgendermaßen zusammenfassen:

Durch infinitesimale Deformation eines  $n$ -fach entarteten elektromagnetischen Hohlraumes entstehen  $n$  verschiedene Frequenzen, welche sich nach (10) berechnen. Die  $n$  Wurzeln von (10) sind stets reell. In der linearen Schar der Eigenfunktionen des ungestörten Hohlraumes besteht ein  $n$ -Tupel (Fundamentalsystem) mit folgenden Eigenschaften:

- a) Die dem Fundamentalsystem angehörigen Eigenfunktionen gehen stetig in die entsprechenden Eigenfunktionen des gestörten Hohlraumes über und
- b) sind, da die wechselseitigen Energieterme verschwinden, gegenseitig entkoppelt.

Werden gleichzeitig im deformierten Hohlraume mehrere Eigenfunktionen mit den Frequenzen  $\omega_0 + \delta\omega_1$ ,  $\omega_0 + \delta\omega_2$  angeregt, so entstehen analog den quasistationären Kreisen Schwebungen und Zwischenfrequenzen  $\Delta\omega$ . Die Hohlraumenergie führt im Takte dieser Zwischenfrequenzen Pendelungen zwischen dem elektrischen und magnetischen Gesamtfelde aus. Im Falle  $n = 2$  ergibt sich:

$$\Delta\omega = \frac{1}{2} (\delta\omega_1 - \delta\omega_2).$$

Das resultierende Feld  $\xi = \xi_1 \sin(\omega_0 + \delta\omega_1)t + \xi_2 \sin(\omega_0 + \delta\omega_2)t$  lautet dann

$$\begin{aligned} \xi &= (\xi_1 + \xi_2) \cos \Delta\omega t \cdot \sin \left( \omega_0 + \frac{1}{2} (\delta\omega_1 + \delta\omega_2) \right) t + \\ &+ (\xi_1 - \xi_2) \sin \Delta\omega t \cdot \cos \left( \omega_0 + \frac{1}{2} (\delta\omega_1 + \delta\omega_2) \right) t \end{aligned}$$

mit  $\delta\omega_1$ ,  $\delta\omega_2$  aus (17).

<sup>5</sup> Die Realität der Wurzeln läßt sich bekanntlich auch durch eine passende Transformation, welche (10) in die Säkulargleichung überführt, beweisen. Wegen  $(W, \xi) \xi > 0$  existiert stets eine reelle lineare Transformation mit der Matrix  $(\gamma_{i,k})$ , aus welcher die Beziehung

$$\pi_k (A_{k,k} - \delta\omega' W_{k,k}) = |\gamma_{i,k}|^2 \cdot \begin{vmatrix} A_{1,1} - \delta\omega' W_{1,1} & \dots & A_{n,1} - \delta\omega' W_{n,1} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} - \delta\omega' W_{n,1} & \dots & A_{n,n} - \delta\omega' W_{n,n} \end{vmatrix}$$

folgt.

Außer dem Fundamentalsystem gibt es nach (16)  $\propto \frac{n(n-1)}{2}$  Systeme, welche durch  $W_{i,k} = 0$  ausgezeichnet sind. Darin sind beispielsweise auch jene vektoriellen Eigenfunktionen enthalten, welche im elementargeometrischen Sinne orthogonal aufeinander stehen. (10) geht hierbei in die Säkulargleichung über.

### 3. Die Aufspaltungsfrequenzen bei zweifacher Entartung.

Besonders einfach wird die Berechnung des Fundamentalsystems für  $n = 2$ . Da dieser Annahme auch eine gewisse praktische Bedeutung zukommt, sollen die entsprechenden Formeln explizit angegeben werden. Für den Fall eines beliebigen zylindrischen Hohlraumes läßt sich nämlich zeigen,<sup>6</sup> daß die Gesamtheit der Eigenfunktionen in zwei Klassen (den elektrischen Typ und den magnetischen Typ) zerfallen, welche folgendermaßen charakterisiert sind:

a) Das  $\mathfrak{E}$ -Feld des elektrischen Typs leitet sich aus einem Hertzschen Vektor ab ( $\mathfrak{J} = U \mathfrak{e}_1$ ), welcher zur Zylinderachse parallel ist.

b) Analog dazu entsteht das  $\mathfrak{G}$ -Feld des magnetischen Typs aus einem Fitzgeraldschen Vektor ( $\mathfrak{G} = V \mathfrak{e}_1$ ), welcher ebenfalls parallel zur Achse liegt.

Die skalaren Funktionen  $U$  und  $V$  genügen der Wellengleichung

$$(\Delta + \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0) \cdot \begin{Bmatrix} U \\ V \end{Bmatrix} = 0$$

mit den verschiedenen aus a und b sich ergebenden Randbedingungen. Werden die beiden resultierenden Eigenwertgleichungen nach  $\omega_E$  bzw.  $\omega_M$  aufgelöst, so wird sich im allgemeinen durch Wahl der Längenparameter des Hohlraumes  $\omega_E = \omega_M$  und damit ein zweifach entarteter Schwingungszustand erreichen lassen.

Gl. (10) ergibt folgende quadratische Gleichung:

$$\begin{vmatrix} A_{1,1} - \delta\omega' W_{1,1} & A_{1,2} - \delta\omega' W_{1,2} \\ A_{2,1} - \delta\omega' W_{2,1} & A_{2,2} - \delta\omega' W_{2,2} \end{vmatrix} = (A_{1,1} - \delta\omega' W_{1,1})(A_{2,2} - \delta\omega' W_{2,2}) - (A_{1,2} - \delta\omega' W_{1,2})^2 = 0.$$

Die Aufspaltungsfrequenzen  $\delta\omega_1'$ ,  $\delta\omega_2'$  sind daraus

$$\left. \begin{aligned} \delta\omega_{1,2}' &= \frac{1}{2} \frac{(A_{1,1} W_{2,2} + A_{2,2} W_{1,1} - 2 A_{1,2} W_{1,2})}{W_{1,1} W_{2,2} - W_{1,2}^2} \pm \\ &\pm \sqrt{\frac{(A_{1,1} W_{2,2} + A_{2,2} W_{1,1} - 2 A_{1,2} W_{1,2})^2}{4 (W_{1,1} W_{2,2} - W_{1,2}^2)^2} + \frac{A_{1,2} - A_{1,1} A_{2,2}}{W_{1,1} W_{2,2} - W_{1,2}^2}} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Für das Fundamentalsystem erhält man:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{E}_1^{(F)} &= (A_{2,2} - \delta\omega_1' W_{2,2}) \mathfrak{E}_1 - (A_{2,1} - \delta\omega_1' W_{1,2}) \mathfrak{E}_2, \\ \mathfrak{E}_2^{(F)} &= (A_{2,2} - \delta\omega_2' W_{2,2}) \mathfrak{E}_1 - (A_{2,1} - \delta\omega_2' W_{1,2}) \mathfrak{E}_2. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Ist noch  $W_{1,2} = 0$ , so geht (17) in

$$\begin{aligned} \delta\omega_{1,2}' &= \frac{1}{4 W_{1,1} W_{2,2}} \{ A_{1,1} W_{2,2} + A_{2,2} W_{1,1} \pm \\ &\pm \sqrt{(A_{1,1} W_{2,2} - A_{2,2} W_{1,1})^2 + 4 A_{1,2}^2 W_{1,1} W_{2,2}} \} \end{aligned}$$

über.

Der in der Einleitung erwähnten Rechnung der Aufspaltungsfrequenzen einer zweifach entarteten Schwingung<sup>1</sup> mit den Feldern  $\{\mathfrak{E}_1, \mathfrak{H}_1\}$ ,  $\{\mathfrak{E}_2, \mathfrak{H}_2\}$  liegt der Gedanke

<sup>6</sup> E. Ledinegg: Ann. Physik, 5. Folge, 41, 537 (1942).



zugrunde, durch Zerlegung des Hohlraumes in zwei einzelne Schwingungskreise  $S_1, S_2$  die Ableitung auf (1) zurückzuführen. Die Rechnung sei hier, vektoriell straffer gefaßt, für beliebige Deformationen des Hohlraumes wiedergegeben.<sup>7</sup>

Ordnet man  $S_1$  die Feldverteilung und den Energieinhalt  $\{\mathfrak{E}_1, \mathfrak{H}_1\}$ ,  $W_{1,1} = 2 \int_V \varepsilon_0 (\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_1^*) d\tau$ , entsprechend  $S_2$  die Feldverteilung  $\{\mathfrak{E}_2, \mathfrak{H}_2\}$  und den Energieinhalt  $W_{2,2} = 2 \int_V \varepsilon_0 (\mathfrak{E}_2, \mathfrak{E}_2^*) d\tau$  zu, so ergibt (1) die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \delta\omega_I' &= \frac{1}{W_{1,1} \Delta V} \int \{ \varepsilon_0 (\mathfrak{E}_1 + \alpha \mathfrak{E}_2) \mathfrak{E}_1^* - \mu_0 (\mathfrak{H}_1 + \alpha \mathfrak{H}_2) \mathfrak{H}_1^* \} d\tau, \\ \delta\omega_{II}' &= \frac{1}{\alpha^2 W_{2,2} \Delta V} \int \{ \varepsilon_0 (\mathfrak{E}_1 + \alpha \mathfrak{E}_2) \alpha \mathfrak{E}_2^* - \mu_0 (\mathfrak{H}_1 + \alpha \mathfrak{H}_2) \alpha \mathfrak{H}_2^* \} d\tau. \end{aligned}$$

Dabei wurde die spezifische Deformationsarbeit mit

$$\begin{aligned} &\varepsilon_0 (\mathfrak{E}_1 + \alpha \mathfrak{E}_2) \mathfrak{E}_1^* - \mu_0 (\mathfrak{H}_1 + \alpha \mathfrak{H}_2) \mathfrak{H}_1^* \\ \text{bzw.} \quad &\alpha \{ \varepsilon_0 (\mathfrak{E}_1 + \alpha \mathfrak{E}_2) \mathfrak{E}_2^* - \mu_0 (\mathfrak{H}_1 + \alpha \mathfrak{H}_2) \mathfrak{H}_2^* \} \end{aligned}$$

angenommen, was aus der Stromdichte bzw. Ladungsdichte an der Begrenzungsfläche des Hohlraumes folgt, welche sich in der Form  $\mathfrak{E}_1 + \alpha \mathfrak{E}_2$  bzw.  $\mathfrak{H}_1 + \alpha \mathfrak{H}_2$  darstellen lassen. Der unbestimmte Faktor ergibt sich aus der Kopplungsbedingung beider Kreise:  $\delta\omega_I = \delta\omega_{II}$ . Mit Einführung der früheren Bezeichnungen erhält man zunächst

$$\left. \begin{aligned} \delta\omega' &= \frac{1}{W_{1,1}} (A_{1,1} + \alpha A_{1,2}), \\ \delta\omega' &= \frac{1}{W_{2,2}} \left( \frac{1}{\alpha} A_{1,2} + A_{2,2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Daraus ist

$$\alpha_{1,2} = \frac{D}{2 A_{1,2} W_{2,2}} \pm \sqrt{\frac{D^2}{4 A_{1,2}^2 W_{2,2}^2} + \frac{W_{1,1}}{W_{2,2}}}; \quad D = \left| \frac{W_{1,1} A_{1,2}}{A_{1,2} W_{2,2}} \right|,$$

welche Beziehung in Verbindung mit (20a) oder (20b) die Aufspaltungsfrequenzen  $\delta\omega_1', \delta\omega_2'$  ergibt. Man erhält

$$\begin{aligned} \delta\omega_{1,2}' &= \frac{1}{4 W_{1,1} W_{2,2}} \{ A_{1,1} W_{2,2} + A_{2,2} W_{1,1} \pm \\ &\pm \sqrt{(A_{1,1} W_{2,2} - A_{2,2} W_{1,1})^2 + 4 A_{1,2} W_{1,1} W_{2,2}} \} \end{aligned}$$

in Übereinstimmung mit (17') und<sup>1</sup> bei Spezialisierung für das dort behandelte Problem. Die Annahme zweier getrennter Schwingungskreise im gleichen geometrischen Raume führt also nur im besonderen Fall  $W_{1,2} = 0$  zum richtigen Ergebnis.

<sup>7</sup> Sollte die Deformation derart erfolgen, daß in einem kleinen Bereich des Hohlraumes eine unstetige Änderung der Ausgangsfeldstärken erfolgt, wie es bei der Einführung einer kleinen Metallkugel der Fall ist, so ist trotzdem Gl. (1) anwendbar. Vgl. die diesbezüglichen Ausführungen in Fußnote 1 und 2.

(Eingegangen am 16. August 1947.)

## Beanspruchung und Schwingungen von Pleuelstangen.

Von H. Parkus, Wien.

Mit 3 Textabbildungen.

**Zusammenfassung.** Der Schaft einer Pleuelstange wird durch pulsierende Längs- und Querkkräfte beansprucht, die zu gekoppelten Längs- und Querschwingungen Anlaß geben. Die Längsschwingungen bleiben stets in ihrer Größe beschränkt, bei den Querschwingungen existiert eine kritische Grenzdrehzahl, oberhalb welcher instabile Drehzahlbereiche auftreten. Deren Berechnung wird angegeben und die Beanspruchung der Stange ermittelt.

**Summary.** A connecting rod is stressed by alternating longitudinal and transverse forces, causing coupled longitudinal and transversal vibrations. The longitudinal vibrations are always limited in magnitude, while a critical number of revolutions exists for transverse vibrations above which unstable regions appear. A method for calculating this critical number of revolutions and the resulting stresses in the rod is presented.

**Résumé.** Les efforts longitudinaux et transversaux alternatifs, donnant lieu à des oscillations couplées longitudinales et transversales fatiguent la bielle. L'importance des oscillations longitudinales est toujours limitée, tandis que pour les oscillations transversales on parvient à un nombre de tours critique au-delà duquel on a affaire à des régimes instables. On a indiqué une méthode pour le calcul de ces valeurs critiques ainsi qu'une méthode de détermination des efforts auxquels est soumise la bielle.

### Einleitung.

Der Schaft einer Pleuelstange wird durch pulsierende Längs- und Querkkräfte beansprucht. Die Theorie derartig belasteter Stäbe hat in den letzten Jahren eine gewisse Entwicklung erfahren,<sup>1-5</sup> so daß es wünschenswert erscheint, sie auch auf die Behandlung von Pleuelstangen auszudehnen. Hierbei sind besonders die bei solchen Beanspruchungen auftretenden Zustände der sogenannten „kinetischen Instabilität“ näher zu untersuchen.

Die Beurteilung der Festigkeit des Stangenschaftes geschieht heute meist in der Weise, daß dieser auf Ausknicken unter der größten Kolbenkraft nachgerechnet wird, wobei man diese als statisch wirkend annimmt.<sup>6-8</sup> Den von der größten Kolbenkraft hervorgerufenen Druckspannungen werden dann die unabhängig davon ermittelten Biegespannungen überlagert, welche durch den zeitlichen Größtwert der Querkkräfte entstehen, meist ohne Rücksicht auf deren Phasenverschiebung. Die so gewonnenen „Vergleichsspannungen“ gestatten es, verschiedene, in der Form und in den Belastungsverhältnissen ähnliche Pleuelstangen miteinander zu vergleichen, sie stellen aber keine Zahlenwerte dar, die zu den Werkstoffeigenschaften in unmittelbare Beziehung gebracht werden dürfen. Es soll daher versucht werden, die Beanspruchung der Stangen in schärferer Weise zu erfassen, als dies bisher möglich war.

<sup>1</sup> E. Mettler: Biegeschwingungen eines Stabes unter pulsierender Achsiallast. Mitt. Forsch.-Anst. Gute-Hoffnungs-Hütte-Konzern 8, 1 (1940).

<sup>2</sup> J. Utida und K. Sezawa: Dynamical Stability of a Column under Periodic Longitudinal Forces. Rep. aeronaut. Res. Inst., Tôkyô Imp. Univ. 15, 139 (1940).

<sup>3</sup> E. Mettler: Biegeschwingungen eines Stabes mit kleiner Vorkrümmung, exzentrisch angreifender pulsierender Achsiallast und statischer Querbelaugung. Forschungsh. a. d. Geb. d. Stahlbaues H. 4, 1 (1941).

<sup>4</sup> K. Klotter: Stabilisierung und Labilisierung durch Schwingungen. Forschung 12, 209 (1941).

<sup>5</sup> E. Mettler: Über die Stabilität erzwungener Schwingungen elastischer Körper. Ingenieur-Arch. 13, 97 (1942).

<sup>6</sup> H. Kremser: Das Triebwerk schnelllaufender Verbrennungskraftmaschinen. Wien. 1939.

<sup>7</sup> E. Mickel, P. Sommer und H. Wiegand: Berechnung und Gestaltung der Triebwerke schnelllaufender Kolbenkraftmaschinen. Berlin. 1942.

<sup>8</sup> H. Denkmeier: Die Ausbildung der Pleuelstangen bei Flugmotoren in Reihenbauart. Ringbuch der Luftfahrttechnik III-A 12. 1938.



Der vorliegenden Arbeit wird die Elastizitätstheorie zweiter Ordnung zugrunde gelegt, d. h. es werden alle Gleichgewichtsbeziehungen an der verformten Stange aufgestellt. Dies ist vor allem deshalb notwendig, weil es sich hier zum Teil um Stabilitätsprobleme handelt. Gleichzeitig wird damit aber auch der schon im stabilen Bereich bei hohen Drehzahlen in Erscheinung tretende Einfluß der Längskräfte auf die Biegespannungen erfaßt.

Die Veränderlichkeit des Schaftträgheitsmomentes über die Schaftlänge wird näherungsweise berücksichtigt. Weiter wird, im Gegensatz zu der bisher ausschließlich üblichen Berechnungsweise, der kurbelseitige Pleuelkopf nicht mehr als verschwindend klein gegenüber der Stangenlänge angesehen. Wie wenig zulässig diese bisherige Vereinfachung ist, bei welcher also Schaftlänge und Stangenlänge einander gleichgesetzt werden, erhellt daraus, daß der Durchmesser des kurbelseitigen Pleuelkopfes etwa ein Drittel der Stangenlänge beträgt.

Bei hohen Drehzahlen tritt der Einfluß der Gaskräfte auf den Kolben gegenüber den Massenkraften stark zurück.<sup>9</sup> Es dürfen daher die beiden bezüglich der Gaskräfte in dieser Arbeit durchgeführten Vereinfachungen als unbedenklich angesehen werden, nämlich erstens ihren Verlauf in Abhängigkeit vom Kurbelwinkel stark zu idealisieren und zweitens ihre Größe als unabhängig von der Drehzahl anzunehmen, d. h. ein für alle Drehzahlen gleiches Indikatordiagramm vorauszusetzen.

Es ist eine zunächst etwas ungewöhnlich erscheinende Eigenschaft der hier auftretenden Schwingungszustände, daß bei verschwindender Dämpfung eine unendliche Anzahl von Resonanzstellen existiert, wobei diese Stellen mit abnehmender Drehzahl immer dichter liegen und schließlich bei der Drehzahl Null eine Häufungsstelle aufweisen. In diesen Resonanzstellen wachsen die Schwingungsaussschläge über alle Grenzen. Es ergäbe sich also die paradoxe Erscheinung, daß die Gefahr der Instabilität und auch die Beanspruchungen um so größer wären, je langsamer die Maschine lief. Dieses Paradoxon verschwindet aber sofort, wenn die (in Wirklichkeit ja stets vorhandene) Dämpfung in Rechnung gestellt wird. Dann fallen nämlich alle bei den niedrigen Drehzahlen auftretenden Labilitätsbereiche bzw. Resonanzstellen weg und es bleibt nur eine endliche Anzahl im Bereich der hohen Drehzahlen übrig.

Die Größe der wirksamen Dämpfung läßt sich nur schwer einigermaßen zutreffend abschätzen. Es kommt hier vor allem neben der Werkstoffdämpfung und der Luftdämpfung die Dämpfung im Pleuellager, die vorwiegend hydrodynamischer Natur ist, und die Dämpfung im Kolbenbolzenlager, die aus hydrodynamischer und Coulombscher Reibung besteht, in Frage, so daß die Rechnung hier mit einem beträchtlichen Unsicherheitsfaktor behaftet erscheint. Hierzu kommt noch, daß alle diese Dämpfungen ganz verschiedenen Gesetzen gehorchen, die sich zum Teil recht weit von der im nachstehenden vorausgesetzten Geschwindigkeitsdämpfung entfernen.

Glücklicherweise ist aber bei Drehzahlen, die genügend weit unterhalb der tiefsten Resonanzstelle, also im Betriebsbereich liegen, die Größe der Dämpfung praktisch ohne Einfluß auf die Schwingungsaussschläge und damit auf die Beanspruchungen, wie dies auch bei den gewöhnlichen erzwungenen Schwingungen der Fall ist. Wohl aber bestimmt sie ganz wesentlich die Lage der tiefsten Resonanzstelle.

### Die angreifenden Massenkkräfte.

Auf die Stange wirken die Massenkraft des Kolbens, die im Punkt *I* (Abb. 1) als Einzelkraft angreift, und die von der Stange selbst herrührenden Massenkkräfte, welche

<sup>9</sup> Diese Tatsache wurde z. B. von H. Meyer: Entwicklung eines dynamischen Pleuelprüfstandes, Dissertation Berlin, 1939, bei dem von ihm gebauten Pleuelprüfstand benützt, indem er nur die Massenkkräfte allein berücksichtigte, so daß sich ein konstruktiv verhältnismäßig einfacher Aufbau des Prüfstandes durchführen ließ.





der Extremwerte in Übereinstimmung zu bringen. Dagegen ist der Druckverlauf zwischen diesen Extremwerten für den vorliegenden Zweck weniger wichtig, wie ja auch die Dauerfestigkeit im wesentlichen nur von Ober- und Unterspannung, nicht aber vom Verlauf der Zwischenwerte abhängt.

In Abb. 3 gibt Kurve 1 die wirklichen Gasdrücke eines Viertakt-Ottomotors, über dem Kurbelwinkel  $\varphi$  aufgetragen. Diese Kurve wird nun durch die idealisierte

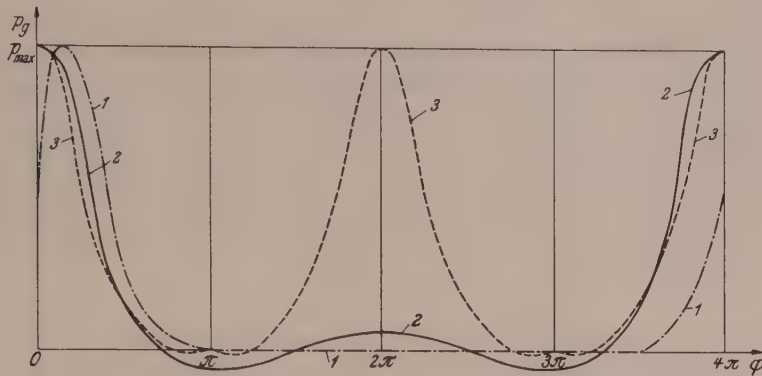


Abb. 3.

Kurve 2 ersetzt, welche wir symmetrisch zu  $\varphi = 0$  annehmen. Ebenso ersetzen wir für den Zweitaktmotor den wirklichen Druckverlauf durch den Verlauf gemäß Kurve 3.

Die beiden Ersatzkurven gehorchen der Gleichung

$$p_g = p_{max} \left( p_{j0} + p_{j1} \cos \frac{\varphi}{j} + p_{j2} \cos \frac{2\varphi}{j} + p_{j3} \cos \frac{3\varphi}{j} + p_{j4} \cos \frac{4\varphi}{j} \right) \quad (7)$$

mit  $j = 1$  für den Zweitaktmotor und  $j = 2$  für den Viertaktmotor. Die Beiwerte  $p_{jk}$  sind in Tab. 1 zusammengestellt.

Tabelle 1.

k	0	1	2	3	4
$p_{1k}$ .....	0·288	0·425	0·175	0·075	0·037
$p_{2k}$ .....	0·151	0·283	0·302	0·183	0·081

Wir dürfen die Beziehung (7) mit den Koeffizienten der Tab. 1 sowohl für Otto- wie für Dieselmotoren verwenden, wenn wir nur für  $p_{max}$  die jeweils entsprechenden größten Gasdrücke einsetzen.

Die Gaskraft auf den Kolben ist also, wenn  $F_k$  die Kolbenfläche bedeutet,

$$P_g = p_g F_k \quad (8)$$

und die gesamte, an der Pleuelstange im Punkt I (Kreuzkopf) angreifende Kraft

$$P = P_m + P_g = -b_I M_k + p_g F_k. \quad (9)$$

#### Die dämpfenden Kräfte.

Die Dämpfung der Längsschwingungen  $u(x, t)$  wird vernachlässigt. Dagegen muß wegen des in der Einleitung erwähnten Paradoxons die Dämpfung der Querschwingungen  $v(x, t)$  in Rechnung gestellt werden. Wir beschränken uns auf die zwei wichtigsten Bestandteile derselben, nämlich auf die Dämpfung im Pleuellager und auf die Werkstoff- und Luftdämpfung des Schaftes.

Beide Dämpfungen setzen wir proportional der Verschiebungsgeschwindigkeit. Für die Lagerdämpfung trifft dies wohl auch ziemlich gut zu, dagegen keineswegs für die Werkstoffdämpfung, welche hauptsächlich von der Größe des Schwingungsausschlages bzw. des Spannungsausschlages, nicht aber von der Frequenz abhängt. Die dadurch bedingte Ungenauigkeit der Rechnung wirkt sich zwar bezüglich der Spannungen, wie bereits erwähnt, nicht nennenswert aus, sie beeinflusst aber die Lage der tiefsten Resonanzstelle.

Wir dürfen annehmen, daß im Pleuellager reine Flüssigkeitsreibung herrscht. Vernachlässigen wir weiter die exzentrische Lage des Pleuelzapfens in der Lagerschale, nehmen wir also die Schmierschichtstärke  $h$  konstant an und setzen noch ebene, laminare und quasistationäre Strömung voraus, so erhalten wir bei der Schwingungsbewegung mit der Winkelgeschwindigkeit  $\chi_t$  (partielle Ableitungen werden durch entsprechende Indizes bezeichnet) eine lineare Geschwindigkeitsverteilung über den Schmierspalt. Ist  $\eta$  die dynamische Zähigkeit des Schmieröles und wählen wir die Länge des Pleuellagers gleich dem Zapfendurchmesser  $d$ , so ergibt sich für das dämpfende Moment der Lagerreibung

$$M_d = -K \chi_t, \quad K = \frac{d^4 \pi}{4 h} \eta. \quad (10)$$

Die von der Werkstoff- und Luftdämpfung herrührende Dämpfungskraft pro Einheit der Schaftlänge setzen wir

$$q_d = -c v_t. \quad (11)$$

Bei Ausschwingversuchen an Biegestäben wird im allgemeinen nicht der Beiwert  $c$ , sondern das logarithmische Dekrement  $\vartheta$  der freien Schwingung bestimmt. Der Zusammenhang mit der Größe  $c$  ist dann gegeben durch

$$c = \frac{2 F \omega_b}{\pi} \vartheta, \quad (12)$$

wo  $\omega_b$  die Eigenkreisfrequenz der ungedämpften Biegeschwingung bedeutet.

Die Versuche ergeben in weiten Grenzen schwankende Zahlenwerte für  $\vartheta$ , etwa  $\vartheta = 0.001 - 0.05$ .<sup>3</sup> Man wird sich, um sicher zu gehen, bei der Durchrechnung eines Zahlenbeispiels in der Nähe der unteren Grenze halten.

### Aufstellung der Bewegungsgleichungen.

Wir gehen bei der Aufstellung der Bewegungsgleichungen vom Hamiltonschen Prinzip aus,<sup>10</sup> welches uns als Variationsprinzip nicht nur die Differentialgleichungen des Problems, sondern auch die natürlichen (dynamischen) Randbedingungen hierzu liefern wird.

Da wir die energieverzehrenden Dämpfungskräfte mit berücksichtigen, also ein nichtkonservatives System betrachten, haben wir das Hamiltonsche Prinzip in seiner allgemeinen Form

$$\delta \int_0^t (T - \Pi) dt + \int_0^t \delta A dt = 0 \quad (13)$$

anzuschreiben. Im zweiten Gliede, welches sich auf die dissipativen Dämpfungskräfte bezieht, dürfen wir das Variationszeichen nicht vor das Integral ziehen, da für diese Kräfte keine Funktion  $A$  existiert, deren Variation mit der virtuellen Arbeit  $\delta A$  identisch ist.  $T$  bedeutet die kinetische Energie des Systems,  $\Pi = A_i + V$  seine potentielle Energie.  $A_i$  ist die Formänderungsarbeit,  $V$  das Potential der äußeren Kräfte mit Ausschluß der Dämpfungskräfte.

<sup>10</sup> E. Trefftz: Mathematische Elastizitätstheorie. Handbuch der Physik, Bd. VI, S. 73. Berlin. 1928.



Das Biegemoment  $M_{II}$  an der Stelle  $II$  (Abb. 1) bewirkt eine Verformung des Pleuelkopfes, so daß die Tangente an die elastische Linie des Schaftes nicht mehr durch den Punkt  $III$  hindurchgeht, sondern den Winkel  $\chi + v_\xi$  mit dem Radius einschließt. Es ist dann

$$M_{II} = k (\chi + v_\xi)_{II} = - (EJ v_{\xi\xi})_{II} \quad (14)$$

und daher

$$\chi = - \left( \frac{E}{k} J v_{\xi\xi} + v_\xi \right)_{II}. \quad (15)$$

$k$  ist die Steifigkeitsziffer der elastischen Einspannung des Schaftes im Pleuelkopf. Ihre rechnerische Bestimmung bereitet wegen der verwickelten Form des Pleuelkopfes sowie wegen des Einflusses des Lagerspieles und der Ölschicht im Pleuellager außerordentliche Schwierigkeiten, so daß man wohl auf den Versuch angewiesen sein wird.

Wir berechnen nun die einzelnen Glieder des Ausdruckes (13). Für die kinetische Energie haben wir, wenn wie üblich die Rotationsträgheit der Schaftelemente vernachlässigt wird,

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \varrho F (u_i^2 + v_i^2) d\xi + \frac{1}{2} \varrho \Theta \chi_i^2. \quad (16)$$

$\varrho \Theta$  ist das Massenträgheitsmoment des Pleuelkopfes bezüglich der Drehachse  $III$ .

Die Formänderungsarbeit  $A_i$  setzt sich zusammen aus der Formänderungsarbeit des Schaftes und aus der des Pleuelkopfes. Bezeichnen wir mit  $\varepsilon$  die Dehnung der Schaftfaser im Abstand  $y$  von der Schwerachse, so ist

$$A_i = \frac{E}{2} \iiint \varepsilon^2 d\xi dy dz + \frac{k}{2} (\chi + v_\xi)_{II}^2. \quad (17)$$

Da wir hier Stabilitätsfragen mit behandeln, haben wir, wie schon in der Einleitung erwähnt, die Dehnung  $\varepsilon$  nach der Theorie zweiter Ordnung zu berechnen.

$u$  und  $v$  sind die Verschiebungen in der Stabachse; für die Faser im Abstand  $y$  gilt:<sup>11</sup>

$$\varepsilon = u_\xi + y v_{\xi\xi} + \frac{v_\xi^2}{2}. \quad (18)$$

In Gl. (17) eingesetzt, entsteht

$$A_i = \frac{E}{2} \int_0^l \left( u_\xi + \frac{v_\xi^2}{2} \right)^2 F d\xi + \frac{E}{2} \int_0^l v_\xi^2 J d\xi + \frac{1}{2} \frac{E^2}{k} (J v_{\xi\xi})_{II}^2. \quad (19)$$

Vor Ermittlung des Potentials der äußeren Kräfte sind die geometrischen Randbedingungen des Problems aufzustellen. Die Verschiebung  $u_{II}$  des Punktes  $II$  (Abb. 1) in Richtung der Stangenachse hängt von der Steifigkeit des Pleuelkopfes, vom Lagerpiel, der Ölzähigkeit usw. ab. Wir wollen hier und weiterhin den Pleuelkopf als starr und das Lager als spielfrei ansehen, so daß die Verformung des Kopfes und der Einfluß der Ölschicht im Lager nur in der Steifigkeitsziffer  $k$ , Gl. (14), zum Ausdruck kommen. Dann gilt als geometrische Randbedingung für die Längsschwingungen

$$u_{II} = 0. \quad (20)$$

Die geometrischen Randbedingungen für die Querschwingungen sind aus Abb. 1 unmittelbar abzulesen:

$$v_I = 0, \quad v_{II} = R \chi. \quad (21)$$

Damit wird das Potential der äußeren Kräfte, zu denen wir hier auch die Trägheitskräfte der Stange selbst zu zählen haben, soweit sie von der Bewegung des Kurbeltriebes herrühren

$$V = - \left[ P u_I + \int_0^l (p u + q v) d\xi \right]. \quad (22)$$

<sup>11</sup> K. Marguerre: Über die Behandlung von Stabilitätsproblemen mit Hilfe der energetischen Methode. Z. angew. Math. Mechan. 18, 57 (1938).

Die äußere Belastung des Pleuelkopfes beachten wir nicht. Sie wird über das als spielfrei vorausgesetzte Lager unmittelbar auf den Kurbelzapfen übertragen.

Es bleibt noch die virtuelle Arbeit der Dämpfungskräfte zu berechnen. Sie wird mit Berücksichtigung der Gl. (10) und (11)

$$\delta A = M_a \delta \chi + \int_0^l q_a d\xi \delta v = -K \chi_t \delta \chi - \int_0^l c v_t \delta v d\xi. \quad (23)$$

Gl. (13) liefert jetzt nach Durchführung der Variation, wenn noch der Winkel  $\chi$  gemäß der Randbedingung (21) durch  $v_{II}$  ausgedrückt wird:

$$\begin{aligned} & \int_0^t dt \int_0^l \left\{ -\rho F u_{tt} + E \left[ F \left( u_\xi + \frac{v_\xi^2}{2} \right) \right]_\xi + p \right\} \delta u d\xi + \int_0^t dt \int_0^l \left\{ -\rho F v_{tt} - c v_t + \right. \\ & + E \left[ F v_\xi \left( u_\xi + \frac{v_\xi^2}{2} \right) \right]_\xi - E (J v_{\xi\xi})_{\xi\xi} + q \left. \right\} \delta v d\xi + \int_0^t dt \left\{ [EF \left( u_\xi + \frac{v_\xi^2}{2} \right) + P] \delta u \right\}_I + \\ & + \int_0^t dt [EJ v_{\xi\xi} \delta v]_I - \int_0^t dt \left\{ \left[ \frac{\rho \Theta}{R} v_{tt} - EJ v_{\xi\xi} + \frac{K}{R} v_t \right] \delta \frac{v}{R} \right\}_{II} = 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichung soll in jedem Augenblick, also für jedes  $t$  erfüllt sein; der Integrand muß daher verschwinden. Führen wir noch an Stelle der Zeitkoordinate  $t$  und an Stelle der Längenkoordinate  $\xi$  durch

$$\varphi = \omega t, \quad x = \frac{\xi}{l}$$

den Kurbelwinkel  $\varphi$  und die dimensionslose Koordinate  $x$  ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dx \left\{ -\rho F \omega^2 u_{\varphi\varphi} + \frac{E}{l^2} \left[ F \left( u_x + \frac{v_x^2}{2l} \right) \right]_x + p \right\} \delta u + \\ & + \int_0^1 dx \left\{ -\rho F \omega^2 v_{\varphi\varphi} - c \omega v_\varphi + \frac{E}{l^3} \left[ F v_x \left( u_x + \frac{v_x^2}{2l} \right) \right]_x - \frac{E}{l^4} (J v_{xx})_{xx} + q \right\} \delta v + \\ & + \left\{ \left[ \frac{EF}{l} \left( u_x + \frac{v_x^2}{2l} \right) + P \right] \frac{\delta u}{l} \right\}_I + \left[ \frac{E}{l^4} J v_{xx} \delta v_x \right]_I - \\ & - \left\{ \left[ \frac{\rho \Theta}{R} \omega^2 v_{\varphi\varphi} - \frac{E}{l^2} J v_{xx} + \frac{K \omega}{R} v_\varphi \right] \frac{\delta v}{l R} \right\}_{II} = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Gl. (24) soll bei beliebiger Wahl von  $\delta u$  und  $\delta v$  erfüllt sein. Nach dem Fundamentallemma der Variationsrechnung ist dies nur dann der Fall, wenn gleichzeitig die beiden gekoppelten, nichtlinearen Differentialgleichungen bestehen:

$$\begin{aligned} u_{\varphi\varphi} - \frac{E}{\rho F \omega^2 l^2} \left[ F \left( u_x + \frac{v_x^2}{2l} \right) \right]_x - \frac{p}{\rho F \omega^2} &= 0, \\ v_{\varphi\varphi} + \frac{c}{\rho F \omega} v_\varphi - \frac{E}{\rho F \omega^2 l^3} \left[ F v_x \left( u_x + \frac{v_x^2}{2l} \right) \right]_x + \frac{E}{\rho F \omega^2 l^4} (J v_{xx})_{xx} - \frac{q}{\rho F \omega^2} &= 0 \end{aligned} \quad (25)$$

mit den natürlichen (dynamischen) Randbedingungen:

$$\begin{aligned} x=0: \frac{EF}{l} \left( u_x + \frac{v_x^2}{2l} \right) + P(\varphi) &= 0, \quad v_{xx} = 0, \\ x=1: \frac{\rho \Theta \omega^2}{R} v_{\varphi\varphi} - \frac{E}{l^2} J v_{xx} + \frac{K \omega}{R} v_\varphi &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Hierzu kommen noch die geometrischen Randbedingungen (20) und (21), die wir mittels Gl. (15) schreiben können:

$$\begin{aligned} x=0: v &= 0, \\ x=1: u &= 0, \quad v + \frac{ER}{l^2 k} J v_{xx} + \frac{R}{l} v_x = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Wir nehmen jetzt eine teilweise Linearisierung vor, indem wir  $v_\xi^2/2$  gegenüber  $u_\xi$



vernachlässigen. Die erste Gleichung enthält dann nur mehr die Funktion  $u$  und kann unabhängig von der zweiten gelöst werden. Diese wird dann mit bekanntem  $u$  gleichfalls linear.

### Die Längsschwingungen.

Wir behandeln zunächst die erste Gleichung des Systems (25). Mit der vorhin erwähnten Linearisierung lautet sie, wenn noch zur Abkürzung

$$\frac{\rho \omega^2 l^2}{E} = \kappa \quad (28)$$

gesetzt und für  $p$  der Ausdruck Gl. (5) und (3) eingetragen wird,

$$\kappa u_{\varphi\varphi} - \frac{1}{F} (F u_x)_x = \kappa r \left[ \mu \frac{\lambda}{2} x - \cos \varphi - \lambda \left( 1 - \frac{\mu}{2} x \right) \cos 2 \varphi \right] \quad (29)$$

mit den Randbedingungen

$$x = 0: F u_x = - \frac{P(\varphi)}{E} l, \quad x = 1: u = 0. \quad (30)$$

Die dimensionslose Konstante  $\kappa$  ist sehr klein gegen 1. (Für die üblichen Pleuelstangenabmessungen und Drehzahlen hat sie etwa den Wert  $1/7000$ ). Wir setzen daher die Lösung der Gl. (29) in Form einer Potenzreihe in  $\kappa$  an und dürfen erwarten, daß diese sehr rasch konvergiert, wenn nur die Folge ihrer Koeffizienten beschränkt bleibt. Wir schreiben also

$$u = r (u^0 + u^1 \kappa + u^2 \kappa^2 + \dots) \quad (31)$$

und unterwerfen, um den Randbedingungen (30) zu genügen, die Funktionenfolge der  $u^n$  den nachstehenden Bedingungen:

$$\begin{aligned} x = 0: F u_x^0 &= - \frac{P(\varphi)}{E} \frac{l}{r}, & u_x^n &= 0 \quad (n = 1, 2, \dots), \\ x = 1: u^n &= 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (32)$$

Gehen wir mit dem Ansatz (31) in Gl. (29), so entsteht eine Folge gekoppelter Differentialgleichungen, die sich rekursiv auflösen lassen. Unter Beachtung der Bedingungen (32) und unter der Voraussetzung konstanten Schaftquerschnittes<sup>12</sup> liefert die Integration:

$$\begin{aligned} u^0 &= \frac{P l}{E F r} (1 - x), \\ u_x^1 &= (\cos \varphi + \lambda \cos 2 \varphi) x - \mu \frac{\lambda}{4} (1 + \cos 2 \varphi) x^2 + \frac{P l}{E F r} x \left( 1 - \frac{x}{2} \right). \end{aligned} \quad (33)$$

Wir behalten nur die beiden ersten Glieder der Reihe (31) bei und brechen die Auflösung bei  $u_x^1$  ab, da die Funktion  $u^1$  selbst nicht mehr gebraucht wird.

Mit  $F = \text{konst.}$  läßt sich die Konvergenz der Reihe (31) leicht überblicken. Es folgt nämlich mit den Randbedingungen (32):

$$u^n = \int_1^x dx \int_0^x u_{\varphi\varphi}^{n-1} dx.$$

Diese Folge ist aber für alle  $x$  und alle  $\varphi$  sicher beschränkt.

Aus Gl. (33) ist unmittelbar abzulesen, daß das letzte Glied in dem Ausdruck für  $u_x^1$  gestrichen werden kann. Es erscheint in der Entwicklung (31) mit  $\kappa$  multipliziert und ist daher gegenüber  $u^0$  ohne weiteres zu vernachlässigen. In dem gleichen Ausdruck ist der Faktor  $\mu/4$  des in  $x$  quadratischen Gliedes etwa gleich  $\lambda$ . Da wir

<sup>12</sup> Diese Annahme darf wohl unbedenklich gemacht werden. Die bedeutend stärkere Veränderlichkeit des Trägheitsmomentes hingegen kann nicht mehr vernachlässigt werden.

bisher alle höheren Potenzen in  $\lambda$  gegenüber den linearen Termen nicht beachtet haben, müssen wir folgerichtig auch dieses Glied weglassen. Wir erhalten also schließlich:

$$u_x = -\frac{P l}{E F} + \kappa r (\cos \varphi + \lambda \cos 2 \varphi) x. \quad (34)$$

### Die Querschwingungen.

Zur näherungsweisen Auflösung der zweiten Gleichung des Systems (25) soll ein Ritzscher Ansatz verwendet werden. Die Beiwerte dieses Ansatzes wollen wir mittels des Galerkinschen Verfahrens bestimmen, das sich aus Gründen, auf die wir sofort näher eingehen, für den vorliegenden Fall besonders eignet.

Wir wählen den Ansatz

$$v = r \sum_n \psi_n(\varphi) \sin \alpha_n x \quad (n = 1, 2, 3 \dots), \quad (35)$$

welcher gliedweise die geometrischen Randbedingungen (27) in  $x = 0$  sowie nach entsprechender Festlegung der Konstanten  $\alpha_n$  auch in  $x = 1$  erfüllt. Außerdem genügt er der dynamischen Randbedingung (26) in  $x = 0$ .

Dagegen ist es nicht möglich, auch der zweiten dynamischen Bedingung (in  $x = 1$ ) zu entsprechen. Diese hat hier die Form einer Differentialgleichung in  $\varphi$ , die jede der Funktionen  $\psi_n$  erfüllen müßte, so daß damit über sie schon verfügt wäre.

Das Galerkinsche Verfahren läßt sich nun durch eine geringe Änderung gegenüber seiner gewöhnlich benützten Form dem hier vorliegenden Fall anpassen (vgl. <sup>13</sup>, S. 759). Wir greifen hierzu auf Gl. (24) zurück und schreiben sie mit den auf  $v$  bezüglichen Gliedern (die anderen sind durch die Lösung des Längsschwingungsproblems bereits weggefallen) in der linearisierten Form nochmals an, wobei wir aber zur Abkürzung die dimensionslosen Konstanten

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{E J_I}{\varrho \omega^2 F l^4}, & E_1 &= \frac{E J_{II} R}{k l^2}, & E_2 &= \frac{\Theta}{F R^2 l}, & E_3 &= \frac{K}{\varrho \omega F R^2 l}, \\ E_4 &= \frac{E J_{II}}{\varrho \omega^2 F l^3 R} = \frac{\mu}{1 - \mu} \frac{J_{II}}{J_I} E_0, & E_5 &= \frac{c}{\varrho \omega F} = \frac{\vartheta}{\pi} \frac{\omega_b}{\omega} \end{aligned} \quad (36)$$

eingeführen. Weiter schreiben wir

$$-\frac{E u_x}{\varrho \omega^2 l^3} = p_0(\varphi) + p_1(\varphi) x, \quad (37)$$

worin

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{P}{\varrho \omega^2 F l^2} = -\frac{M_k r}{\varrho F l^2} (\cos \varphi + \lambda \cos 2 \varphi) + \frac{p_{\max} F_k}{\varrho \omega^2 F l^2} \sum_{n=0}^4 p_{jn} \cos \frac{n \varphi}{j}, \\ p_1 &= -\frac{\lambda}{\mu} (\cos \varphi + \lambda \cos 2 \varphi). \end{aligned} \quad (38)$$

Schließlich ist noch über die Abhängigkeit des Trägheitsmomentes  $J$  von der  $x$ -Koordinate eine Annahme zu treffen. Wir wollen einen linearen Verlauf zwischen den beiden Endwerten voraussetzen:

$$J = J_I (1 + a x), \quad (39)$$

womit man praktisch wohl immer ausreichen dürfte.

Gl. (24) geht jetzt über in:

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \left\{ v_{\varphi\varphi} + E_5 v_{\varphi} + [(p_0 + p_1 x) v_x]_x + E_0 [(1 + a x) v_{xx}]_{xx} + r (u x \sin \varphi + \right. \\ \left. + \frac{\lambda}{2} \sin 2 \varphi) \right\} \delta v - E_0 [v_{xx} \delta v_x]_I + [(E_2 v_{\varphi\varphi} - E_4 v_{xx} + E_3 v_{\varphi}) \delta v]_{II} = 0. \end{aligned} \quad (40)$$

<sup>13</sup> C. B. Biezeno und R. Grammel: Technische Dynamik. Berlin. 1939.



Dazu kommen die geometrischen Randbedingungen:

$$v_I = 0, \quad \left( v + E_1 v_{xx} + \frac{1-\mu}{\mu} v_x \right)_{II} = 0. \quad (41)$$

Wir bilden nun nach der Galerkinschen Idee die Variationen  $\delta v$  aus Gl. (35), indem wir die noch frei wählbaren Funktionen  $\psi_n$  variieren:

$$\delta v = r \sum_n \delta \psi_n \sin \alpha_n x. \quad (42)$$

Gehen wir jetzt mit den beiden Ausdrücken Gl. (35) und (42) in Gl. (40), so erhalten wir nach Durchführung der Integration aus der Vorschrift, daß wegen der Willkürlichkeit der  $\delta \psi_n$  deren Koeffizienten verschwinden müssen, ein System von  $n$  linearen, gewöhnlichen Differentialgleichungen für die noch unbestimmten Funktionen  $\psi_n$ .

Die Konstanten  $\alpha_n$  sind aus der Gleichung

$$\operatorname{tg} \alpha_n = \frac{1-\mu}{\mu} \frac{\alpha_n}{E_1 \alpha_n^2 - 1} \quad (43)$$

zu berechnen. Der Ansatz (35) genügt dann auch der zweiten geometrischen Randbedingung (41).

Wir beschränken uns auf einen eingliedrigen Ansatz. Es wird sich zeigen, daß die zahlenmäßige Lösung selbst dann noch recht langwierig ist, sich aber immerhin im Rahmen des für die Praxis Brauchbaren hält.

Wir gehen also mit

$$v = r \psi(\varphi) \sin \alpha x \quad (44)$$

in die Gl. (40). Nach Integration entsteht, wenn der Beiwert von  $\delta \psi$  Null gesetzt wird, die Differentialgleichung:

$$\psi'' + A \psi' + \beta(\varphi) \psi = \Phi(\varphi). \quad (45)$$

Ihre Koeffizienten lauten in einzelnen:

$$A = \frac{(2\alpha - \sin 2\alpha) E_5 + 4\alpha E_3 \sin^2 \alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha + 4\alpha E_2 \sin^2 \alpha},$$

$$\begin{aligned} \beta(\varphi) = & \frac{\alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha + 4\alpha E_2 \sin^2 \alpha} [-\alpha(2\alpha - \sin 2\alpha) p_0 - (\alpha^2 - \\ & - \alpha \sin 2\alpha - \sin^2 \alpha) p_1 + \alpha^3(2\alpha - \sin 2\alpha) E_0 + \alpha^2(\alpha^2 - \\ & - \alpha \sin 2\alpha - 3 \sin^2 \alpha) E_0 a + 4\alpha^2 E_4 \sin^2 \alpha], \end{aligned}$$

$$\Phi(\varphi) = \frac{-4}{2\alpha - \sin 2\alpha + 4\alpha E_2 \sin^2 \alpha} \left[ \frac{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha}{\alpha} \mu \sin \varphi + \frac{1 - \cos \alpha}{2} \lambda \sin 2\varphi \right]. \quad (46)$$

Der Beiwert  $\beta(\varphi)$  ist eine periodische Funktion mit der Periode  $2\pi j$ . Gl. (45) stellt somit eine inhomogene Hillsche Differentialgleichung mit Dämpfungsglied dar. Ihre Theorie, vor allem der Sonderfall der Mathieuschen Gleichung, ist mehrfach behandelt worden.<sup>14-19</sup> Wir wenden die Ergebnisse auf den vorliegenden Fall an.

<sup>14</sup> G. Floquet: Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. Ann. École norm. sup. **12**, 47 (1883).

<sup>15</sup> M. J. O. Strutt: Lamésche-, Mathieusche und verwandte Funktionen in Physik und Technik. Berlin. 1932.

<sup>16</sup> G. Calamai: Sul sistema canonico di una classe di equazione differenziali dal secondo ordine a coefficienti periodici. Atti R. Accad. naz. Lincei, Rend. (6), **19**, 560 (1934).

<sup>17</sup> G. Calamai: Sulla stabilità delle soluzioni per l'equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti periodici. Atti Accad. d'Italia (7), **3**, 183 (1942).

<sup>18</sup> K. Klotter und G. Kotowski: Über die Stabilität der Lösungen Hillscher Differentialgleichungen mit drei unabhängigen Parametern. Z. angew. Math. Mechan. **23**, 149 (1943).

<sup>19</sup> G. Kotowski: Lösungen der inhomogenen Mathieuschen Differentialgleichungen mit periodischer Störfunktion beliebiger Frequenz. Z. angew. Math. Mechan. **23**, 213 (1943).

### Die homogene Hillsche Differentialgleichung.

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gl. (46) sei

$$\psi = \psi_h + \psi_p. \quad (47)$$

$\psi_h$  ist die allgemeine Lösung der homogenen und  $\psi_p$  ein partikuläres Integral der inhomogenen Gleichung.

Wir behandeln zuerst die homogene Gleichung. Ihre allgemeine Lösung läßt sich, wenn gewisse Ausnahmefälle, die wir später kurz andeuten, ausgeschlossen bleiben, auf Grund eines von Floquet<sup>14</sup> aufgestellten Theorems stets in der Form schreiben:

$$\psi_h = C_1 e^{v_1 \varphi} T_1(\varphi) + C_2 e^{v_2 \varphi} T_2(\varphi), \quad (48)$$

wobei die Funktionen  $T(\varphi)$  periodisch mit der Periode  $2\pi j$  sind. Die beiden Konstanten  $v$  werden als die „charakteristischen Exponenten“ der Differentialgleichung bezeichnet.

Die Lösung  $\psi_h$  interessiert hier nur insoweit, als ihre Kenntnis zur Beurteilung der sog. „kinetischen Instabilität“ der Pleuelstange dient. Sollen nämlich die durch irgendeine Störung hervorgerufenen „freien“, d. h. von der Querbewegung unabhängigen Querschwingungen der Stange stets in ihrer Größe beschränkt bleiben, so muß, wie aus Gl. (48) unmittelbar abzulesen ist,

$$\Re(v) < 0 \quad (49)$$

gelten. Gl. (49) ist somit die Stabilitätsbedingung der Pleuelstange.

Die Bestimmung des charakteristischen Exponenten gelingt nach Floquet in folgender Weise: Durch die beiden Funktionen  $\psi_{h1}(\varphi)$  und  $\psi_{h2}(\varphi)$  möge ein Fundamentalsystem von Lösungen der homogenen Gleichung gebildet werden. Unterwirft man diese Lösungen den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} \psi_{h1}(0) &= 1, & \psi_{h2}(0) &= 0, \\ \psi_{h1}'(0) &= 0, & \psi_{h2}'(0) &= 1 \end{aligned} \quad (50)$$

und setzt

$$s = e^{2\pi j v}, \quad (51)$$

wo  $s$  eine (im allgemeinen komplexe) Konstante bedeutet, so erhält man als Bestimmungsgleichung für  $s$ :<sup>14, 15</sup>

$$s^2 - [\psi_{h1}(2\pi j) + \psi_{h2}'(2\pi j)]s + e^{-2\pi j A} = 0. \quad (52)$$

Besitzt Gl. (52) eine Doppelwurzel  $s_1 = s_2$ , so gilt für die beiden zugehörigen charakteristischen Exponenten

$$v_1 = v_2 \pm \frac{in}{j} \quad (n = 0, 1, 2, 3 \dots).$$

Die allgemeine Lösung ist dann nicht durch Gl. (48) gegeben, sondern erscheint in der Form

$$\psi_h = e^{v_1 \varphi} [C_1 T_1(\varphi) + C_2 \varphi T_2(\varphi)],$$

wo die  $T(\varphi)$  wiederum periodische Funktionen mit der Periode  $2\pi j$  sind. Als Stabilitätsbedingung bleibt auch hier Gl. (49).

Existiert schließlich eine Wurzel  $s_1 = \pm 1$  der Gl. (52), dann ist gemäß Gl. (51)

$$v_1 = \pm i \frac{n}{2j} \quad (n = 0, 1, 2, 3 \dots).$$

In diesem Fall gibt es, wie aus Gl. (48) zu entnehmen ist, rein periodische Lösungen der homogenen Gleichung. Diesen Lösungen kommt besondere Bedeutung zu. Variiert man nämlich die Beiwerte der Differentialgleichung, indem man gewisse Parameter (im vorliegenden Fall vor allem die Drehzahl) eine Anzahl von Werten durchlaufen



läßt, so bilden nach einem Satz von O. Haupt<sup>15</sup> (S. 14) die zu den rein periodischen Lösungen gehörigen Parameterwerte die Grenzen zwischen den stabilen und instabilen Lösungsgebieten.

Die Lösungen mit  $n = 0, 2, 4 \dots$  heißen ganzperiodische Lösungen (Periode  $2\pi j$ ), diejenigen mit  $n = 1, 3, 5 \dots$  halbperiodische Lösungen (Periode  $4\pi j$ ). Die zugehörigen Parameterwerte (Eigenwerte) werden entsprechend als ganz- bzw. halbperiodische Eigenwerte bezeichnet.

Ein weiterer Satz von Haupt (a. a. O.) besagt, daß dann, wenn der Parameter alle seine Werte kontinuierlich durchläuft, immer abwechselnd zwei ganzzahlige und zwei halbzahlige Eigenwerte aufeinander folgen. Dabei liegt stets zwischen je zwei „gleichartigen“, also entweder ganz- oder halbzahligen Eigenwerten ein Gebiet, in dem die Lösungen labil sind, dagegen zwischen je zwei „ungleichartigen“ ein Gebiet, in dem sie stabil sind.

Die Kenntnis der Eigenwerte ist somit von großem Interesse, da sie die Stabilitäts- und Labilitätsbereiche gegeneinander abgrenzen. Wir haben hier, bei gegebenen Abmessungen der Pleuelstange und gegebener Belastung, die Drehzahl (Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ ) bzw. ihren Kehrwert als Parameter aufzufassen. Dabei wollen wir die den Eigenwerten zugeordneten Drehzahlen als „Grenzdrehzahlen“ bezeichnen.

Bei verschwindender Dämpfung  $A = 0$  existieren abzählbar unendlich viele Eigenwerte, und zwar gibt es einen kleinsten (stets ganzperiodischen) Eigenwert  $(1/\omega)_{\min}$ , also eine größte Grenzdrehzahl. Unterhalb dieses Eigenwertes bzw. oberhalb dieser Drehzahl sind alle Lösungen labil. Zwischen dieser Drehzahl und der nächst kleineren Grenzdrehzahl (die also zu dem nächst größeren Eigenwert gehört) liegt ein stabiles Gebiet, dann folgt wieder ein labiles usw. Mit kleiner werdender Drehzahl folgen die Eigenwerte bei immer schmaler werdenden Labilitätsbereichen immer dichter aufeinander und häufen sich bei Annäherung an die Drehzahl Null. Bei Ausschaltung der Dämpfung würde sich somit eine unbeschränkte Anzahl von kritischen Drehzahlbereichen ergeben.

Ist dagegen eine Dämpfung vorhanden,  $A \neq 0$ , so verschwinden alle über einem gewissen Eigenwert liegenden höheren Eigenwerte und es bleibt nur eine endliche Anzahl reeller Werte übrig, wobei die Lage des höchsten von der Größe der wirksamen Dämpfung bestimmt wird. Das oberhalb dieses Wertes, also unterhalb der zugehörigen kleinsten Grenzdrehzahl liegende Lösungsgebiet und somit auch der entsprechende Drehzahlbereich sind stabil.

Die tatsächliche Bestimmung der Eigenwerte geschieht in der Weise, daß die ganz- bzw. halbperiodischen Lösungen in Form entsprechender Fourier-Reihen mit unbestimmten Koeffizienten angesetzt werden. Eintragen in die homogene Differentialgleichung und Vergleich der Beiwerte liefert dann je ein unendliches, lineares und homogenes Gleichungssystem für die Koeffizienten, dessen Systemdeterminante verschwinden muß. Diese Bedingung gibt die beiden Bestimmungsgleichungen für die ganz- bzw. halbperiodischen Eigenwerte.

Soweit die Grenzdrehzahlen weit über den Betriebsdrehzahlen liegen, ist ihre Kenntnis lediglich von theoretischem Interesse und man wird bei der praktischen Untersuchung einer Pleuelstange die Mühe ihrer Berechnung möglichst zu vermeiden trachten. Es soll deshalb ein leicht zu handhabendes Kriterium angegeben werden, das eine für die Stabilität des Betriebsdrehzahlbereiches hinreichende (aber nicht notwendige) Bedingung darstellen wird.

Wir greifen auf die homogene Differentialgleichung zurück und schreiben ihren Beiwert  $\beta(\varphi)$  in der Form an:

$$\beta(\varphi) = \beta_0 + \beta_1 \cos \frac{\varphi}{j} + \beta_2 \cos \frac{2\varphi}{j} + \beta_3 \cos \frac{3\varphi}{j} + \beta_4 \cos \frac{4\varphi}{j}. \quad (53)$$

$\beta_0, \beta_1 \dots$  sind dimensionslose Konstanten, die wir hier nicht explizit anschreiben, da sich etwas unhandliche Ausdrücke ergeben, die bei Zahlenrechnungen einfacher direkt aus Gl. (46) ermittelt werden.

Nun führen wir durch

$$\varepsilon_n = \beta_n / \beta_0 \quad (n = 1, 2, 3, 4). \quad (54)$$

neue dimensionslose Konstante  $\varepsilon_n$  ein, so daß die homogene Differentialgleichung geschrieben werden kann:

$$\psi_h'' + A \psi_h' + \left(1 + \varepsilon_1 \cos \frac{\varphi}{j} + \varepsilon_2 \cos \frac{2\varphi}{j} + \varepsilon_3 \cos \frac{3\varphi}{j} + \varepsilon_4 \cos \frac{4\varphi}{j}\right) \beta_0 \psi_h = 0. \quad (55)$$

Machen wir jetzt die Voraussetzung

$$\varepsilon_n \ll 1 \quad (n = 1, 2, 3, 4), \quad (56)$$

so haben wir die Möglichkeit, uns in einfacher Weise die beiden Partikulärlösungen  $\psi_{h1}$  und  $\psi_{h2}$  zu verschaffen, die den Anfangsbedingungen (50) genügen und die zur Berechnung der Floquetschen Konstanten  $s$  bzw. des charakteristischen Exponenten  $\nu$  gemäß Gl. (52) notwendig sind.

Hierzu entwickeln wir diese Lösungen in eine Potenzreihe in den  $\varepsilon_n$  und behalten wegen der Voraussetzung (56) nur die linearen Glieder bei. Tragen wir diese Entwicklung in die homogene Differentialgleichung ein, so erhalten wir eine Folge von gekoppelten Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten für die Beiwerte der  $\varepsilon_n$ , die sich schrittweise auflösen lassen. Mit der Abkürzung

$$+ \sqrt{\beta_0 - A^2/4} = w \quad (57)$$

lautet die Lösung (in komplexer Form geschrieben):

$$\psi_{hm} = e^{\left(-\frac{A}{2} \pm iw\right)\varphi} \sum_{n=0}^4 \left(A_{mn} \cos \frac{n\varphi}{j} + B_{mn} \sin \frac{n\varphi}{j}\right) \quad (m = 1, 2). \quad (58)$$

Die Konstanten  $A_{mn}$  und  $B_{mn}$  wären aus der oben erwähnten Folge von Differentialgleichungen zusammen mit den Anfangsbedingungen (50) zu berechnen. Ihre Bestimmung ist aber hier nicht notwendig, man sieht vielmehr, daß die Lösung (58) bereits die Floquetsche Form Gl. (48) besitzt. Der charakteristische Exponent  $\nu$  ist also

$$\nu = -\frac{A}{2} \pm iw. \quad (59)$$

Für diesen Exponenten ist aber, solange  $A \neq 0$ , die Stabilitätsbedingung (49) stets, auch bei imaginärem  $w$ , erfüllt, so daß folgendes Kriterium angegeben werden kann: „Derjenige Drehzahlbereich, für welchen die Voraussetzungen (56) bei nicht verschwindender Dämpfung erfüllt sind, ist stets stabil.“

#### Die inhomogene Hillsche Differentialgleichung.

Wir haben jetzt noch das partikuläre Integral  $\psi_p$  zu berechnen. Wenn wir beachten, daß die Störungsfunktion  $\Phi$  gemäß Gl. (46) die Form hat,

$$\Phi(\varphi) = \Phi_1 \sin \varphi + \Phi_2 \sin 2\varphi, \quad (60)$$

wo  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  Konstanten sind, so können wir die Lösung  $\psi_p$  mittels einer Fourier-Reihe

$$\psi_p = \sum_0^{\infty} g_m \cos \frac{m\varphi}{j} + \sum_1^{\infty} h_m \sin \frac{m\varphi}{j} \quad (61)$$

ansetzen. Nach Eintragen in Gl. (45) entsteht zur Bestimmung der Fourier-Koeffizienten  $g_m$  und  $h_m$  das unendliche Gleichungssystem:



$$\begin{aligned}
& 2 \beta_0 g_0 + \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2 + \beta_3 g_3 + \beta_4 g_4 = 0, \\
& -\frac{2 m^2}{j^2} g_m + \sum_{n=0}^4 \beta_n (g_{m-n} + g_{m+n} + g_{-m+n}) + \frac{2 m}{j} A h_m = 0, \\
& -\frac{2 m^2}{j^2} h_m + \sum_{n=0}^4 \beta_n (h_{m-n} + h_{m+n} - h_{-m+n}) - \frac{2 m}{j} A g_m = \\
& = \begin{cases} 2 \Phi_n, & \text{wenn } m/j = n \\ 0, & \text{wenn } m/j \neq n \end{cases} \quad n = 1, 2, \\
& (m = 1, 2, 3 \dots). \quad (62)
\end{aligned}$$

Hierbei muß vereinbart werden, daß alle Größen mit negativen Indizes gleich Null zu setzen sind.

Dasselbe, jedoch homogene Gleichungssystem erhält man bei der Berechnung der ganzperiodischen Lösungen. In den ganzzahligen Grenzpunkten verschwindet daher die Nennerdeterminante. Die Koeffizienten  $g_m$  und  $h_m$  wachsen dort über alle Grenzen und damit auch die Ausschläge der „erzwungenen“, d. h. von der Querbelastrung abhängigen Querschwingungen. Man nennt deshalb diese Stellen in Analogie zu den Verhältnissen bei den gewöhnlichen harmonischen Schwingungen „Resonanzstellen“.<sup>19</sup> Diese Resonanzstellen fallen also mit den ganzperiodischen Grenzdrehzahlen zusammen.

Mit der Kenntnis von  $\psi_p$  ist auch die Beanspruchung der Stange berechenbar. Es gilt für die von den Längskräften hervorgerufenen Spannungen  $\sigma_l$ , die sich gleichmäßig über den Querschnitt verteilen:

$$\sigma_l = \frac{E}{l} u_x = -\rho \omega^2 l^2 (p_0 + p_1 x)$$

und für die von den Längs- und Querkraften herrührenden Biegespannungen  $\sigma_b$ :

$$\sigma_b = \pm \frac{E}{l^2} y v_{xx} = \pm \frac{E}{l^2} y r \alpha^2 \psi_p \sin \alpha x.$$

(Eingegangen am 7. Oktober 1947.)

## Der Vorwärtseinschnitt aus fehlerhaften Festpunkten.

Von F. Ackerl, Wien.

Mit 4 Textabbildungen.

**Zusammenfassung.** Unter der Annahme, daß ein Neupunkt als Vorwärtseinschnitt aus zwei gegebenen Punkten bestimmt ist, wird die allgemeine Frage gelöst: „Welche mittlere Fehlerellipse erhält man im Neupunkt, wenn die mittleren Fehlerellipsen der Festpunkte und die Beobachtungsfehler gegeben sind?“

**Summary.** Supposing that a new point is given by intersection, starting from two known trig points, the author gives the solution of the general problem: „What is the new point's ellipse of mean error, if the ellipses of mean error of the given trig points and the errors of observation are known?“

**Résumé.** En admettant qu'un point nouveau est déterminé par intersection, en partant de deux points fixes connus, l'auteur donne la solution du problème général: « Quelle est l'ellipse d'erreur moyenne du point nouveau, si les ellipses d'erreur moyenne des deux points fixes donnés et les erreurs d'observation sont connues? »

In zwei Untersuchungen<sup>1, 2</sup> wurden die Koordinatenfehler eines durch einfachen Rückwärtseinschnitt bestimmten Punktes ermittelt unter der Annahme, daß die Koordinatenfehler der gegebenen Punkte und die Fehler der zwei beobachteten Winkel bekannt sind. Die Lösung der entsprechenden Aufgabe für den einfachen Vorwärtseinschnitt ist von Hinterkeuser<sup>3</sup> veröffentlicht worden. Wie in Fußnote 1 und 2

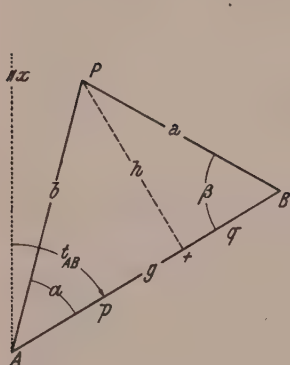


Abb. 1.

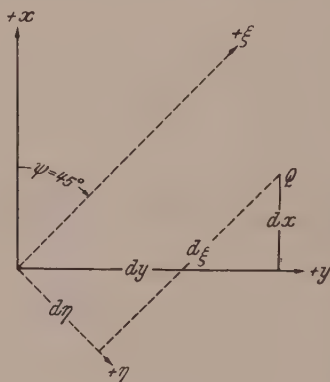


Abb. 2.

bemerkte wurde, stimmt das Ergebnis Hinterkeusers mit dem meiner eigenen Untersuchungen zum Vorwärtseinschnitt überein, die bereits 1940 vorlagen, aber während des Krieges nicht veröffentlicht werden konnten.

Es lag sehr nahe, sich nicht nur auf die Ermittlung des entstehenden Punktfehlers zu beschränken, sondern die allgemeine Aufgabe zu lösen: „Welche mittlere Fehlerellipse ergibt sich für den Neupunkt, wenn die mittleren Fehlerellipsen der Festpunkte und die Beobachtungsfehler bekannt sind?“ Auf den letzten Teil der

Frage, nämlich hinsichtlich der Wirkung der Beobachtungsfehler allein, ist auch Hinterkeuser<sup>3</sup> eingegangen durch numerische Einzelrechnung von Koordinatendifferentialen mit nachfolgendem Übergang auf mittlere Fehler und Elemente der Fehlerellipse. Eine eigene Bearbeitung der erwähnten Gesamtfrage war, durch die in Fußnote 1 und 2 genannten kriegsgeodätischen Aufgaben veranlaßt, im Jahre 1941 bis zu einer praktisch bereits tauglichen Form gediehen und da es nun gelungen ist, eine recht einfache Lösung aufzufinden, so soll dieses Ergebnis nachfolgend dargestellt werden.

Die Koordinaten des durch einfachen Vorwärtseinschnitt bestimmten Punktes  $P$  ( $x, y$ ) (Abb. 1) werden als Funktionen der Koordinaten der gegebenen Punkte  $A, B$  und der in ihnen gemessenen Winkel  $\alpha, \beta$  dargestellt durch:

$$x = \varphi_1(x_A, y_A, x_B, y_B, \alpha, \beta), \quad y = \varphi_2(x_A, y_A, x_B, y_B, \alpha, \beta). \quad (1)$$

Mit kurzen Bezeichnungen für die partiellen Differentialquotienten erhalten wir:

$$\left. \begin{aligned} dx &= K_1 dx_A + K_2 dy_A + K_3 dx_B + K_4 dy_B + K_5 d\alpha + K_6 d\beta, \\ dy &= L_1 dx_A + L_2 dy_A + L_3 dx_B + L_4 dy_B + L_5 d\alpha + L_6 d\beta \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

und unter der Annahme voneinander unabhängiger Fehler ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} m_x^2 &= K_1^2 m_{x_A}^2 + K_2^2 m_{y_A}^2 + K_3^2 m_{x_B}^2 + K_4^2 m_{y_B}^2 + K_5^2 m_\alpha^2 + K_6^2 m_\beta^2, \\ m_y^2 &= L_1^2 m_{x_A}^2 + L_2^2 m_{y_A}^2 + L_3^2 m_{x_B}^2 + L_4^2 m_{y_B}^2 + L_5^2 m_\alpha^2 + L_6^2 m_\beta^2. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

<sup>1</sup> Ackerl: Sull'influenza di una posizione difettosa dei punti dati nel risultato della intersezione inversa. Rivista del Catasto e dei Servizi Tecnici Erariali, Roma, 1947.

<sup>2</sup> Ackerl: Über den Rückwärtseinschnitt aus fehlerhaften Festpunkten. Schweiz. Z. Vermessung u. Kulturtechn. 1947, Nr. 2, 3, 4.

<sup>3</sup> Hinterkeuser: Über eine Punktpaarbestimmung nach beweglichen Hochzielen und ihre Verwendung zum Aufbau einer weiträumigen Triangulation. Sonderheft 20 zu den Nachrichten aus dem Reichsvermessungsdienst, Mitteilungen des Reichsamtes für Landesaufnahme, Berlin, 1941.



Wenn man entsprechend der Abb. 2 auf ein um  $\psi = 45^\circ$  verdrehtes Koordinatensystem  $\xi, \eta$  übergeht, so entstehen aus den Transformationsgleichungen:

$$d\xi = dx \cos \psi + dy \sin \psi, \quad d\eta = dy \cos \psi - dx \sin \psi \quad (4)$$

die Beziehungen

$$d\xi = \frac{\sqrt{2}}{2} (dx + dy), \quad d\eta = \frac{\sqrt{2}}{2} (-dx + dy). \quad (5)$$

Wir erhalten mit (2) in abgekürzter Anschreibung:

$$\left. \begin{aligned} d\xi &= \frac{\sqrt{2}}{2} \{ (K_1 + L_1) dx_A + (K_2 + L_2) dy_A + \dots + (K_6 + L_6) d\beta \}, \\ d\eta &= \frac{\sqrt{2}}{2} \{ (-K_1 + L_1) dx_A + (-K_2 + L_2) dy_A + \dots + (-K_6 + L_6) d\beta \} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

und hieraus beim Übergang auf mittlere Fehler:

$$\left. \begin{aligned} m_\xi^2 &= \frac{1}{2} \{ (K_1 + L_1)^2 m_{x_A}^2 + (K_2 + L_2)^2 m_{y_A}^2 + \dots + (K_6 + L_6)^2 m_\beta^2 \}, \\ m_\eta^2 &= \frac{1}{2} \{ (-K_1 + L_1)^2 m_{x_A}^2 + (-K_2 + L_2)^2 m_{y_A}^2 + \dots + (-K_6 + L_6)^2 m_\beta^2 \}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Für eine mittlere Fehlerellipse mit den Halbachsen  $A, B$  und dem Richtungswinkel  $\Theta$  der Achse  $A$  im System  $x, y$  leiten wir aus der Polarkoordinaten-Darstellung ihrer Fußpunktkurve, nämlich

$$m_t^2 = A^2 \cos^2 (t - \Theta) + B^2 \sin^2 (t - \Theta), \quad (8)$$

die mittleren Fehler für die Richtungen  $t = 0^\circ, 90^\circ, 45^\circ, 135^\circ$  der gewählten Achsen  $x, y, \xi, \eta$  ab und erhalten:

$$\left. \begin{aligned} m_x^2 &= A^2 \cos^2 \Theta + B^2 \sin^2 \Theta, \\ m_y^2 &= A^2 \sin^2 \Theta + B^2 \cos^2 \Theta, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} m_\xi^2 &= A^2 \cos^2 (45^\circ - \Theta) + B^2 \sin^2 (45^\circ - \Theta), \\ m_\eta^2 &= A^2 \sin^2 (45^\circ - \Theta) + B^2 \cos^2 (45^\circ - \Theta). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Mit  $2 \sin^2 \Theta = 1 - \cos 2 \Theta$  und  $2 \cos^2 \Theta = 1 + \cos 2 \Theta$  entstehen hieraus die Beziehungen:

$$2 m_x^2 = (A^2 + B^2) + (A^2 - B^2) \cos 2 \Theta, \quad (11)$$

$$2 m_y^2 = (A^2 + B^2) - (A^2 - B^2) \cos 2 \Theta, \quad (12)$$

$$2 m_\xi^2 = (A^2 + B^2) + (A^2 - B^2) \sin 2 \Theta, \quad (13)$$

$$2 m_\eta^2 = (A^2 + B^2) - (A^2 - B^2) \sin 2 \Theta, \quad (14)$$

so daß die Elemente der Fehlerellipse aus mittleren Fehlerangaben, die für die gewählten Achsenrichtungen gelten, berechnet werden können.

Wir erhalten aus (11), (12) bzw. (13), (14)

$$A^2 + B^2 = m_x^2 + m_y^2 = m_\xi^2 + m_\eta^2 = M_P^2, \quad (15)$$

aus (11)

$$(A^2 - B^2) \cos 2 \Theta = 2 m_x^2 - (A^2 + B^2) = m_x^2 - m_y^2, \quad (16)$$

aus (13)

$$(A^2 - B^2) \sin 2 \Theta = 2 m_\xi^2 - (A^2 + B^2) = m_\xi^2 - m_\eta^2,$$

aus (16)

$$(A^2 - B^2)^2 = (m_x^2 - m_y^2)^2 + (m_\xi^2 - m_\eta^2)^2, \quad (17)$$

$$\operatorname{tg} 2 \Theta = \frac{m_\xi^2 - m_\eta^2}{m_x^2 - m_y^2}. \quad (18)$$

Eine taugliche Darstellung der Koordinaten  $x, y$  des Neupunktes für die Entwicklung von (3), (7) haben wir mit den folgenden, für die Anwendung der Rechenmaschine vorbereiteten Formeln aus <sup>4</sup> (S. 427) bzw. <sup>5</sup> (S. 49) zur Verfügung, nämlich:

$$\begin{aligned} x &= x_A + N \{ (x_B - x_A) \operatorname{ctg} \alpha + (y_B - y_A) \}, \\ y &= y_A + N \{ - (x_B - x_A) + (y_B - y_A) \operatorname{ctg} \alpha \}, \\ x &= x_B + N \{ - (x_B - x_A) \operatorname{ctg} \beta + (y_B - y_A) \}, \\ y &= y_B + N \{ - (x_B - x_A) - (y_B - y_A) \operatorname{ctg} \beta \}, \end{aligned} \quad (19)$$

wobei als Abkürzung gesetzt wurde:

$$N = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}. \quad (20)$$

Ermittelt man nun aus den Gl. (19) die Differentialquotienten  $K_i, L_i$  zu (2) und beachtet die der Abb. 1 entsprechenden Beziehungen:

$$\operatorname{ctg} \alpha = p:h, \quad \operatorname{ctg} \beta = q:h, \quad p + q = g, \quad N = h:g, \quad (21)$$

so ergibt sich die folgende Zusammenstellung:

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= q:g, & L_1 &= h:g, \\ K_2 &= -h:g, & L_2 &= q:g, \\ K_3 &= p:g, & L_3 &= -h:g, \\ K_4 &= h:g, & L_4 &= p:g, \\ K_5 &= \frac{b}{a} \frac{(x - x_B)}{\sin(\alpha + \beta)}, & L_5 &= \frac{b}{a} \frac{(y - y_B)}{\sin(\alpha + \beta)}, \\ K_6 &= \frac{a}{b} \frac{(x - x_A)}{\sin(\alpha + \beta)}, & L_6 &= \frac{a}{b} \frac{(y - y_A)}{\sin(\alpha + \beta)}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Zur Bestimmung der Elemente der Fehlerellipse des Neupunktes aus den Gl. (15) bis (18) sind die drei Ausdrücke

$$m_x^2 + m_y^2, \quad m_x^2 - m_y^2, \quad m_z^2 - m_{\dot{z}}^2$$

aus (3) bzw. (7) unter Beachtung von (22) aufzusuchen und demnach die folgenden Verbindungen der partiellen Differentialquotienten  $K_i, L_i$  herzustellen:

$$K_i^2 + L_i^2, \quad K_i^2 - L_i^2, \quad (K_i + L_i)^2 - (-K_i + L_i)^2 = 4 K_i L_i.$$

Beachtet man die aus der Abb. 1 folgenden Beziehungen:

$$q^2 + h^2 = a^2, \quad p^2 + h^2 = b^2, \quad q = a \cos \beta, \quad p = b \cos \alpha, \quad h = a \sin \beta = b \sin \alpha,$$

so ergibt sich z. B. für  $i = 1$ :

$$\begin{aligned} K_1^2 + L_1^2 &= \frac{a^2}{g^2}, \\ K_1^2 - L_1^2 &= (K_1^2 + L_1^2) - 2 L_1^2 = \frac{a^2}{g^2} (1 - 2 \sin^2 \beta) = \frac{a^2}{g^2} \cos 2\beta, \\ 4 K_1 L_1 &= 4 \frac{a \cos \beta}{g} \frac{a \sin \beta}{g} = 2 \frac{a^2}{g^2} \sin 2\beta. \end{aligned}$$

<sup>4</sup> Jordan-Eggert: Handbuch der Vermessungskunde, Bd. I, 1. Halbbd. Stuttgart: Metzler. 1931.

<sup>5</sup> Koll-Eggert: Geodätische Rechnungen mittels der Rechenmaschine. Stuttgart: Wittwer. 1927.



Nach ähnlicher Berechnung der weiteren Ausdrücke für die Indizes  $i = 2, 3, 4$  erhalten wir die folgende Zusammenstellung:

$$\left. \begin{aligned} (K_1^2 + L_1^2) &= (K_2^2 + L_2^2) = \frac{a^2}{g^2}, & (K_3^2 + L_3^2) &= (K_4^2 + L_4^2) = \frac{b^2}{g^2}, \\ (K_1^2 - L_1^2) &= -(K_2^2 - L_2^2) = \frac{a^2}{g^2} \cos 2\beta, & (K_3^2 - L_3^2) &= -(K_4^2 - L_4^2) = \frac{b^2}{g^2} \cos 2\alpha, \\ 4 K_1 L_1 &= -4 K_2 L_2 = 2 \frac{a^2}{g^2} \sin 2\beta, & 4 K_3 L_3 &= -4 K_4 L_4 = -2 \frac{b^2}{g^2} \sin 2\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Die Koeffizienten mit den Indizes  $i = 5, 6$  entwickeln wir mit (22) unter Beachtung der Beziehungen:

$$\begin{aligned} (x - x_B)^2 + (y - y_B)^2 &= a^2, & (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 &= b^2, \\ y - y_B &= a \sin t_{BP}, & y - y_A &= b \sin t_{AP}, \\ x - x_B &= a \cos t_{BP}, & x - x_A &= b \cos t_{AP} \end{aligned}$$

und finden

$$\left. \begin{aligned} K_5^2 + L_5^2 &= \frac{b^2}{\sin^2(\alpha + \beta)}, & K_6^2 + L_6^2 &= \frac{a^2}{\sin^2(\alpha + \beta)}, \\ K_5^2 - L_5^2 &= (K_5^2 + L_5^2) \cos 2t_{BP}, & K_6^2 - L_6^2 &= (K_6^2 + L_6^2) \cos 2t_{AP}, \\ 4 K_5 L_5 &= 2 (K_5^2 + L_5^2) \sin 2t_{BP}, & 4 K_6 L_6 &= 2 (K_6^2 + L_6^2) \sin 2t_{AP}. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Durch Einsetzung der Ergebnisse (23), (24) in die Gl. (3), (7) erhalten wir, nach Zusammenfassung gleichartiger Glieder, die folgenden Ausdrücke:

$$m_x^2 + m_y^2 = \frac{a^2}{g^2} (m_{x_A}^2 + m_{y_A}^2) + \frac{b^2}{g^2} (m_{x_B}^2 + m_{y_B}^2) + \frac{b^2}{\sin^2(\alpha + \beta)} m_\alpha^2 + \frac{a^2}{\sin^2(\alpha + \beta)} m_\beta^2, \quad (25)$$

$$\left. \begin{aligned} m_x^2 - m_y^2 &= \frac{a^2}{g^2} (m_{x_A}^2 - m_{y_A}^2) \cos 2\beta + \frac{b^2}{g^2} (m_{x_B}^2 - m_{y_B}^2) \cos 2\alpha + \\ &+ \frac{b^2}{\sin^2(\alpha + \beta)} m_\alpha^2 \cos 2t_{BP} + \frac{a^2}{\sin^2(\alpha + \beta)} m_\beta^2 \cos 2t_{AP}, \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

$$\left. \begin{aligned} m_\xi^2 - m_\eta^2 &= \frac{a^2}{g^2} (m_{x_A}^2 - m_{y_A}^2) \sin 2\beta - \frac{b^2}{g^2} (m_{x_B}^2 - m_{y_B}^2) \sin 2\alpha + \\ &+ \frac{b^2}{\sin^2(\alpha + \beta)} m_\alpha^2 \sin 2t_{BP} + \frac{a^2}{\sin^2(\alpha + \beta)} m_\beta^2 \sin 2t_{AP}. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Bei Einführung der Abkürzungen:

$$\begin{aligned} C &= \frac{a^2}{g^2} (m_{x_A}^2 - m_{y_A}^2), & D &= \frac{b^2}{g^2} (m_{x_B}^2 - m_{y_B}^2), \\ E &= \frac{b^2}{\sin^2(\alpha + \beta)} m_\alpha^2, & F &= \frac{a^2}{\sin^2(\alpha + \beta)} m_\beta^2 \end{aligned} \quad (28)$$

ergibt sich für Gl. (17) der Ausdruck:

$$\left. \begin{aligned} (A^2 - B^2)^2 &= (m_x^2 - m_y^2)^2 + (m_\xi^2 - m_\eta^2)^2 = \\ &= \{C \cos 2\beta + D \cos 2\alpha + E \cos 2t_{BP} + F \cos 2t_{AP}\}^2 + \\ &+ \{C \sin 2\beta - D \sin 2\alpha + E \sin 2t_{BP} + F \sin 2t_{AP}\}^2 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

oder auch

$$(A^2 - B^2)^2 = \{I\}^2 + \{II\}^2.$$

In dieser Ordnung deuten die einzelnen Glieder jeder geschwungenen Klammer jene Beiträge an, die hinsichtlich der Koeffizienten  $C$  bzw.  $D$  von der fehlerhaften Lage der Punkte  $A$  bzw.  $B$  und hinsichtlich der Koeffizienten  $E$  bzw.  $F$  von den Winkelfehlern  $m_\alpha$  bzw.  $m_\beta$  herrühren.

Man kann die Klammerwerte sehr einfach auch zeichnerisch ermitteln als die Projektionen von zwei Vektorpolygonen, nämlich

$$\text{I} \quad (C, 2\beta), \quad (D, 2\alpha), \quad (E, 2t_{BP}), \quad (F, 2t_{AP}),$$

bzw.

$$\text{II} \quad (C, 2\beta), \quad (-D, 2\alpha), \quad (E, 2t_{BP}), \quad (F, 2t_{AP})$$

auf die Richtung  $0^\circ$  bzw.  $90^\circ$  der Winkelzählung, wobei man, zur Vereinfachung und Abkürzung der Konstruktion günstigerweise die Reihenfolge  $E, F, C, D$  wählen wird, und die unter Umständen negativen Werte der Koeffizienten  $C$  und  $D$  durch gegensinnige Abtragung entsprechend berücksichtigt.

Diese Darstellung wird räumlich gedrängter, wenn man die Einzelvektoren zerlegt und die Klammerwerte durch Addition der Anteile ermittelt. Diese beiden Arten

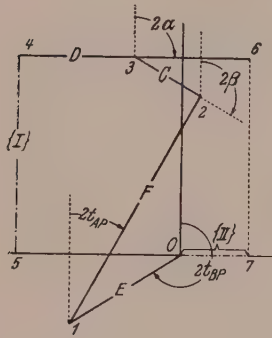


Abb. 3 a.

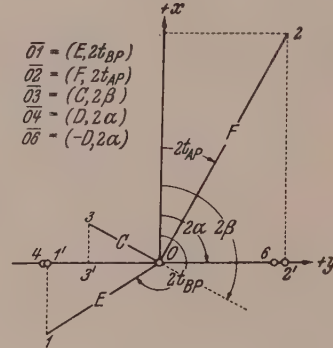


Abb. 3 b.



Abb. 4 a.

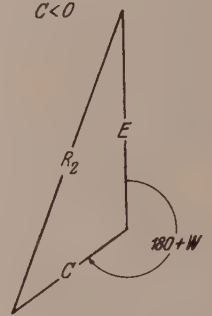


Abb. 4 b.

der Konstruktion sind für die Lageverhältnisse der Abb. 1 in den folgenden Abb. 3 a und 3 b schematisch dargestellt für den Fall, daß die beiden Koeffizienten  $C, D$  negative Werte annehmen. Das Polygon I verläuft von 0 bis 4 und gibt  $\overline{45} = \{I\}$ , das Polygon II zweigt vom ersten im Punkt 3 ab, endet in 6 und gibt  $\overline{07} = \{II\}$ .

Aus Abb. 3 b erhält man  $\{I\} = +\overline{11'} + \overline{22'} + \overline{33'} + 0$  bzw.  $\{II\} = +\overline{01'} + +\overline{02'} + \overline{03'} + \overline{06}$ .

Indessen finden wir eine zweckentsprechendere und getrennte Darstellung der einzelnen Fehlereinflüsse nach Auflösung der Klammern in (29) und geeigneten Zusammenfassungen. Mit Übergehung der Zwischenrechnungen ergibt sich die nachfolgende Form:

$$\left. \begin{aligned} (A^2 - B^2)^2 = & C^2 + D^2 - 2CD \cos [180^\circ - 2(\alpha + \beta)] + \\ & + E^2 + F^2 - 2EF \cos [180^\circ - 2(\alpha + \beta)] + \\ & + C^2 + E^2 - 2CE \cos [180^\circ - 2t_{AB}] + \\ & + D^2 + F^2 - 2DF \cos [180^\circ - 2t_{AB}] - \\ & - C^2 + F^2 - 2CF \cos 2[t_{AB} - (\alpha + \beta)] - \\ & - D + E - 2DE \cos 2[t_{AB} + (\alpha + \beta)]. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Die erste Zeile gibt den Einfluß an, der nur von den Lagefehlern der gegebenen Punkte  $A, B$  herrührt.

Die zweite Zeile entspricht der alleinigen Wirkung der Messungsfehler von  $\alpha$  und  $\beta$  und die restlichen vier Zeilen bestimmen die Beiträge der möglichen Kombinationen aus den Lagefehlern der gegebenen Punkte und den Fehlern der beobachteten Winkel.



Aus der Bedeutung der Koeffizienten (28) erkennen wir z. B., daß die vorletzte Zeile von (30) den Einfluß angibt, der vom Lagefehler des Punktes  $A$  und vom fehlerhaften Winkel  $\beta$  verursacht wird.

Da jede Zeile von (30) den Cosinussatz für ein Dreieck (Abb. 4a) darstellt, dessen Seiten durch die Koeffizienten von (28) gegeben sind und die den aus (30) ersichtlichen Winkel  $W$  einschließen, kann jeder Zeilenwert sehr rasch zeichnerisch durch Abgreifen der dritten Dreiecksseite bestimmt werden. Es ist dabei zu beachten, daß bei Koeffizienten mit verschiedenen Vorzeichen die Abgreifung zu dem Endpunkt der unter  $W + 180^\circ$  aufgetragenen Strecke erfolgen muß (Abb. 4b).

Wenn nach Quadrierung und Addition der so ermittelten Anteile der Gesamtbetrag von  $(A^2 - B^2)^2$  und daher auch  $A^2 - B^2 = G^2$  vorliegt, dann ergibt eine einfache Konstruktion oder Rechnung auch die gesuchten Halbachsen der mittleren Fehlerellipse des Neupunktes.

Unter Beachtung von (15) erhalten wir aus (25) die Größe des Lagefehlers im Neupunkt mit  $M_P^2 = m_x^2 + m_y^2 = A^2 + B^2$  und durch Verbindung mit dem nun bekannten Wert  $G^2 = A^2 - B^2$  ergibt sich  $2 A^2 = M_P^2 + G^2$ ,  $2 B^2 = M_P^2 - G^2$ .

Man hat schließlich noch entsprechend Gl. (18) die Richtung der großen Achse der Fehlerellipse aufzusuchen und erreicht dies rechnerisch oder auch wieder durch Konstruktion unter Beachtung der mit (26), (27) gegebenen Beziehungen. Bei Anwendung der Bezeichnungen (28) finden wir:

$$\operatorname{tg} 2 \Theta = \frac{C \sin 2 \beta - D \sin 2 \alpha + E \sin 2 t_{BP} + F \sin 2 t_{AP}}{C \cos 2 \beta + D \cos 2 \alpha + E \cos 2 t_{BP} + F \cos 2 t_{AP}} = \frac{\{II\}}{\{I\}}, \quad (31)$$

wo  $\{I\}$  bzw.  $\{II\}$  die bei Gl. (29) benützte Abkürzung darstellt.

Da diese Beträge durch eine Konstruktion entsprechend Abb. 3a leicht gefunden werden können, erhält man unmittelbar, und bei Beachtung der Vorzeichen von  $\{I\}$  bzw.  $\{II\}$  eindeutig, den Wert  $2 \Theta$  bzw.  $\Theta$ .

Über die aus der hier dargestellten Lösung ableitbaren Schlußfolgerungen soll in einer späteren Mitteilung berichtet werden.

(Eingegangen am 22. Oktober 1947.)

## Beitrag zur Feldtheorie der Flüssigkeitswirbel.

Von F. Magyar, Wien.

**Zusammenfassung.** Der Gradient der Energie und die Ersatzkräfte lassen sich durch eine Feldgröße anschaulich darstellen. Einfache Anwendungen im Raum und in der Ebene werden gezeigt.

**Summary.** The energy gradient as well as the substitute forces („Ersatzkräfte“) can be represented very clearly by a quantity pertaining to the field. Simple applications, in a plane and in the space, are shown.

**Résumé.** Le gradient de l'énergie ainsi que les forces fictives („Ersatzkräfte“) peuvent être représentés avantageusement par une quantité liée au champ. On montre des applications simples dans l'espace et dans le plan.

Die Anwendbarkeit der Theorie der Potentialströmungen, die sich als Lösungen der Laplaceschen Gleichung ergeben, unterliegt einigen Einschränkungen. Die Bedingung der Wirbelfreiheit ermöglicht zwar in bekannter Weise eine Integration der Eulerschen Bewegungsgleichung der vollkommenen Flüssigkeit, führt aber zu dem nicht immer brauchbaren Ergebnis, daß die Energie im ganzen Raum unveränderlich ist. Dazu kommt noch die Unmöglichkeit, Randbedingungen zu erfüllen, die einen Vergleich mit dem Verhalten wirklicher Flüssigkeiten gestatten. Da die Flüssigkeit erfahrungsgemäß an Wänden haftet, gelingt es nicht ohne weiteres, einen

Übergang zur Potentialströmung herzustellen. Man kann allerdings im Sinne der Grenzschichttheorie<sup>1</sup> eine scharfe Trennung zwischen stark wirbelnder Grenzschicht und freier Potentialströmung vollziehen, wobei dann die von den Wänden abgebremsste Randschicht jene Verhältnisse herstellen soll, welche zu Energieänderungen oder zum Auftreten von sogenannten Ersatzkräften führen, die einen eingetauchten Körper ersetzen können. Als offenes Problem bleibt dann nur die Abschätzung der Dicke der Grenzschicht,<sup>2</sup> die aber in Wirklichkeit allmählich in die freie Strömung übergeht. Diese strenge Unterscheidung zwischen einer von der Zähigkeit beeinflussten Randströmung, für welche wegen ihrer geringen Dicke Näherungslösungen der Stokes-Navierschen Gleichung zulässig sind, und einer Potentialströmung um den durch die sogenannte Verdrängungsdicke vergrößert gedachten eingetauchten Körper ist ohne Zweifel außerordentlich fruchtbar und hat u. a. die Voraussetzungen zur Tragflügeltheorie<sup>3</sup> geschaffen, sie ist aber offenbar nicht mehr geeignet, wenn es sich um den Übergang von einer wirbelnden zu einer Potentialströmung handelt. Solche Probleme kommen praktisch z. B. bei Strömungen durch Schaufelgitter vor, in welchen man mit Rücksicht auf die Energieübertragung und die infolge der Wirbel auftretenden Ersatzkräfte nicht immer Potentialnetze anwenden kann. In diesen Fällen wird es vorteilhafter sein, eine vom Randgebiet ausgehende allmählich abklingende Wirbelverteilung anzunehmen, auch wenn dies einen Verzicht auf die bequeme Möglichkeit, Potentialnetze herzustellen, unvermeidlich macht. Wie leicht einzusehen ist, wird auf diese Weise auch ohne Berücksichtigung der Zähigkeit eine bessere Anpassung an das Verhalten wirklicher Flüssigkeiten möglich.

Der angedeutete Weg, das Strömungsbild aus einer angenommenen Wirbelverteilung zu bestimmen, ist schon von Prasil<sup>4</sup> beschritten worden. In konsequenter Weiterverfolgung der Anregung, die von der Analogie zwischen Wirbelfeld und elektrischem Feld<sup>5</sup> ausgeht, gelangt man schließlich zu einer Geometrie der Wirbelnlinien, die in den meisten praktischen Fällen der Anschauung leicht zugänglich sein dürfte und die Ermittlung der Energieänderung wie auch der Ersatzkräfte gestattet. Es soll aber an dieser Stelle besonders darauf hingewiesen werden, daß es sich im folgenden nicht um die modellmäßige Darstellung der Flüssigkeit, sondern nur um eine geometrische Methode handelt, die sich aus der Bewegungsgleichung und aus der Helmholtzschen Definition der Wirbel rein formal und zwanglos ergibt.<sup>6</sup>

Die Eulersche Bewegungsgleichung der vollkommenen Flüssigkeiten

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (1)$$

läßt sich mittels der bekannten Vektorbeziehung

$$(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = \nabla \frac{v^2}{2} - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})$$

in die Lambsche Form<sup>7</sup>

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \frac{v^2}{2} - 2 \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (2)$$

bringen, worin  $\mathbf{w} = \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{v})$  den Helmholtzschen Wirbel bezeichnet. Wenn  $U$

<sup>1</sup> L. Prandtl: Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. Verh. des III. Internat. Math. Kongresses, Heidelberg, 1904.

<sup>2</sup> Th. v. Kármán: Über laminare und turbulente Reibung. Z. angew. Math. Mech. 1 (1921).

<sup>3</sup> L. Prandtl: Tragflügeltheorie, I. Teil. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Math.-phys. Kl. 1918.

<sup>4</sup> F. Prasil: Technische Hydromechanik, 2. Aufl. Berlin: Springer-Verlag, 1926.

<sup>5</sup> L. Flamm: Der Mechanismus des elektrischen Feldes. Österr. Ingenieur-Arch. 1, H. 1/2 (1946).

<sup>6</sup> F. Magyar: Geometrie der Wirbelströmung. Anz. Ak. Wiss. Wien, 1949, Nr. 2.

<sup>7</sup> H. Lamb: Lehrbuch der Hydrodynamik, Deutsche Ausgabe. Leipzig: Teubner, 1907.



das Potential der auf die Masseneinheit bezogenen konservativen Kraft ist und  $\int \frac{dp}{\varrho} = \Pi$  gesetzt wird, erhält man für stationäre Strömung den Energiegradienten

$$\nabla E = \nabla \left( \frac{v^2}{2} + U + \Pi \right) = 2 \mathbf{v} \times \mathbf{w} \quad (3)$$

senkrecht zu den aus Scharen von Stromlinien und Wirbellinien gebildeten Energieniveaulächen.

Wenn außer der konservativen Kraft durch Führungswände, durch einen eingetauchten Körper oder durch das den letzteren ersetzende Wirbelsystem auf die Flüssigkeit Zwangs- bzw. Ersatzkräfte ausgeübt werden, ist an Stelle der Gl. (3)

$$\nabla E = 2 \mathbf{v} \times \mathbf{w} + \mathbf{f}^* \quad (4)$$

zu schreiben. Verschwindet  $\nabla E$  außerhalb des Körpers bzw. des diesen ersetzenden Wirbelsystems, so erhält man, bezogen auf das Massenelement  $\varrho dV$

$$\mathbf{f}^* \varrho dV = -2 \varrho dV (\mathbf{v} \times \mathbf{w}). \quad (5)$$

Dabei ist zu beachten, daß der Energiegradient und die Ersatzkräfte überall dort verschwinden, wo Wirbelfreiheit herrscht,  $\mathbf{w} = 0$ , oder aber die Stromlinien mit den Wirbellinien zusammenfallen,  $\mathbf{w} \parallel \mathbf{v}$ . Die Integration der Gl. (5) ist also nur auf solche Massenteile der Flüssigkeit zu erstrecken, welche von Wirbellinien durchzogen sind, die nicht mit den Stromlinien zusammenfallen. Energiegradient und Ersatzkräfte sind also durch die Feldgröße  $2 \mathbf{v} \times \mathbf{w}$  bestimmt und es ist wesentlich, daß die Wirbel relativ zur Strömung Flächen überstreichen. Umgekehrt ist die Energie eine skalare Potentialfunktion der Flächengeschwindigkeit der Wirbelvektoren.

Für ein Linienelement  $d\mathbf{s}$  wird die Energieänderung

$$dE = d\mathbf{s} \cdot \nabla E = 2 d\mathbf{s} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \quad (6)$$

Null, wenn  $d\mathbf{s}$  zu  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{w}$  komplanar ist, das heißt in den Energieniveaulächen verläuft. Die Gültigkeit der Bernoullischen Gleichung ist somit nicht, wie meist angenommen wird, auf die Stromlinie beschränkt, sondern die Konstante ändert sich von Stromlinie zu Stromlinie nur dann, wenn diese verschiedenen Energieniveaulächen angehören. Die Energieänderung ist dann durch

$$dE = d\mathbf{n} \cdot \nabla E = 2 d\mathbf{n} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \quad (7)$$

gegeben, wobei  $d\mathbf{n}$  normal zu den Energieniveaulächen zu messen ist. Fallen die Wirbellinien mit den Stromlinien zusammen, so gilt die Energiegleichung, die jetzt nicht mit der Bernoullischen Gleichung zu verwechseln ist, wie für die Potentialströmung mit einer räumlichen Konstanten. Es verdient hervorgehoben zu werden, daß sich in der Literatur kaum genauere Hinweise auf die erwähnte Schichtung der Energie finden.

Die Feldgröße  $2 \mathbf{v} \times \mathbf{w}$  bestimmt nach obigem die Felder der Energiegradienten und der Ersatzkräfte. Man erhält diese Felder, indem man entsprechend einer bekannten Deutung des Vektorproduktes

$$2 \mathbf{v} \times \mathbf{w} = 2 \mathbf{v} \mathbf{w} = 2 \mathbf{v} \mathbf{w} \quad (8)$$

entweder das Geschwindigkeitsfeld mittels des Axiators des Wirbelvektors als Postfaktor oder das Wirbelfeld mittels des Axiators des Geschwindigkeitsvektors als Präfaktor transformiert. Die Axiatoren sind durch die Matrices

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 & -w_z & w_y \\ w_z & 0 & -w_x \\ -w_y & w_x & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & v_z & -v_y \\ -v_z & 0 & v_x \\ v_y & -v_x & 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

gegeben. Falls bei praktischen Problemen ein getrenntes Arbeiten in den Koordinatenebenen von Vorteil ist, kann man entweder die Komponenten von  $\mathfrak{v} \times \mathfrak{w}$  benützen, die in der üblichen Schreibweise aus

$$\begin{aligned} \mathfrak{v} \times \mathfrak{w} = & i (v_y w_z - v_z w_y) + \\ & + j (v_z w_x - v_x w_z) + \\ & + k (v_x w_y - v_y w_x) \end{aligned} \quad (10)$$

folgen und zusammengesetzt  $\frac{1}{2} \nabla E$  ergeben, oder man bildet die Projektionen von  $\mathfrak{v} \times \mathfrak{w}$  auf die Koordinatenebenen, deren geometrische Summe gerade  $\nabla E$  ergibt. Z. B. wäre die Projektion in die  $x, y$ -Ebene

$$\begin{aligned} i (v_y w_z - v_z w_y) + j (v_z w_x - v_x w_z) &= w_z (i v_y - j v_x) + v_z (j w_x - i w_y) = \\ &= w_z (-\underline{v}_3) + v_z \underline{w}_3, \end{aligned} \quad (11)$$

wobei unter  $-\underline{v}_3$  bzw.  $\underline{w}_3$  die um  $-\frac{\pi}{2}$  bzw.  $+\frac{\pi}{2}$  gedrehten Projektionen von  $\mathfrak{v}$  bzw.  $\mathfrak{w}$  in die  $x, y$ -Ebene zu verstehen sind. Praktisch sind die Verhältnisse meist viel einfacher.

Die räumliche Anschaulichkeit der Methode läßt sich z. B. an folgendem bekanntem Problem zeigen. Eine rechteckig geschlossene Wirbellinie liege in der Stromfläche einer räumlichen Parallelströmung, deren Geschwindigkeit  $\mathfrak{B}$  ist, und zwar derart, daß die Längsseiten mit den Stromlinien zusammenfallen und daher zwar keine Kraftwirkung hervorrufen, wohl aber zur Ablenkung der Strömung beitragen. Die durch das gesamte Wirbelsystem induzierte Störungsgeschwindigkeit  $\mathfrak{v}^*$  kann aus der Gleichung von Biot-Savart ermittelt werden. Wird die Wirbellinie in der nunmehr durch die Anströmrichtung

$$\mathfrak{B}' = \mathfrak{B} + \mathfrak{v}^*$$

bestimmten Stromfläche festgehalten, so überstreichen die kurzen Seiten des Rechteckes relativ zur Strömung Flächen und ergeben sich zwei gleiche entgegengesetzte Kräfte, die die Rechteckfläche normal zur Stromfläche zu stellen trachten. Identifiziert man die beiden kurzen Rechteckseiten als tragenden Wirbel und als Anfahrwirbel eines Tragflügels, so hat man den sogenannten Hufeisenwirbel, dem eine konstante Zirkulationsverteilung über die Flügelbreite entspricht. Da der Anfahrwirbel mit der Strömung mitschwimmt und infolgedessen relativ zur Flüssigkeit keine Fläche überstreicht, erhält man den Auftrieb nur durch Integration über den festgehaltenen tragenden Wirbel, und zwar senkrecht zu  $\mathfrak{B}'$ . Wenn die Zirkulation über die Flügelbreite veränderlich ist, setzt sich das Wirbelgebilde derart aus rechteckigen Wirbellinien zusammen, daß hinter dem Flügel eine Wirbelfläche entsteht, die mit der durch die tragenden Wirbel hindurchgegangenen Stromfläche zusammenfällt. Grundsätzlich ist das Problem das gleiche geblieben. Es ändert sich auch im wesentlichen nichts, wenn man zu einer schiefen Anströmung übergeht, indem man die Rechtecke der Wirbellinien zu Parallelogrammen verzerrt. Besonders einfach ist das sogenannte ebene Problem, das den  $\infty$  langen Tragflügel betrifft. Da die tragenden Wirbel nunmehr z. B. in der  $z$ -Richtung unbegrenzt und unveränderlich verlaufen, hat man die Gl. (5) nur über die in der  $x, y$ -Ebene liegende Basisfläche  $F$  des als allgemeinen Zylinder gedachten Flügels und über die Länge 1 in der  $z$ -Richtung zu integrieren,

$$\mathfrak{B}^* = -\varrho \underline{\mathfrak{B}} \int_F w_z df, \quad (12)$$



und erhält nach Einführung der Zirkulation  $\Gamma$  mit Hilfe des Satzes von Stokes ohne längere Rechnung die Kutta-Joukowskysche Kraft

$$\mathfrak{K}^* = - \varrho \mathfrak{B} \Gamma \quad (13)$$

senkrecht zu  $\mathfrak{B}$ .

Die angeführten Beispiele, die von in einer Potentialströmung diskret angeordneten Wirbelverteilungen ausgehen, betreffen zwar nur mit anderen Hilfsmitteln bereits gelöste Probleme, lassen aber doch die Einfachheit und Durchsichtigkeit der angeregten Methode erkennen. Die Möglichkeit der Darstellung des Energiefeldes aus der Flächengeschwindigkeit der Wirbelvektoren ist indes auch bei solchen Wirbelströmungen gegeben, für welche der oben erwähnte Kunstgriff einer systematischen Trennung in verschieden zu behandelnde Strömungsgebiete nicht mehr befriedigt.

Besonders einfach werden die Verhältnisse für ebene Strömungen. In der üblichen Schreibweise ergeben sich die Komponenten des Energiegradienten

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{v^2}{2} + U + \Pi \right) = v_y \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial E}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{v^2}{2} + U + \Pi \right) = v_x \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right), \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

worin

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = \omega$$

die Winkelgeschwindigkeit der Flüssigkeitsdrehung bzw. den Wirbelvektor bedeutet, der senkrecht zur  $x, y$ -Ebene steht. Bildet man

$$dE = \frac{\partial E}{\partial x} dx + \frac{\partial E}{\partial y} dy = 2 \omega (v_y dx - v_x dy), \quad (15)$$

so erkennt man, daß die Energie längs einer Stromlinie

$$v_x dy - v_y dx = 0 \quad (16)$$

unverändert bleibt, das heißt die Stromlinien sind gleichzeitig Energieniveaulinien oder mit anderen Worten, die Energieniveaulinien stehen senkrecht zur  $x, y$ -Ebene und die Stromlinien stellen ihre Spuren dar. Der Energiegradient liegt in der  $x, y$ -Ebene und steht auf den Stromlinien senkrecht.

Da der Wirbelvektor  $\omega$  senkrecht zur  $x, y$ -Ebene steht, können die Wirbellinien nicht mit den Stromlinien zusammenfallen. Die Konstante der Bernoullischen Gleichung ändert sich daher in der  $x, y$ -Ebene von Stromlinie zu Stromlinie, während sie in der  $z$ -Richtung unverändert bleibt, wodurch übrigens die ebene Strömung von vornherein gekennzeichnet ist. Bezeichnet  $\Psi$  die Stromfunktion und

$$d\Psi = v dn = v_x dy - v_y dx$$

den „Fluß“ zwischen zwei Stromlinien im Abstand  $dn$ , so folgt aus Gl. (15) die einfache Beziehung

$$\frac{dE}{d\Psi} = - 2 \omega, \quad (17)$$

die die Strömung vollständig umschreibt. Die Energieänderung ist also durch

$$dE = - 2 \omega d\Psi = - 2 \omega v dn, \quad (18)$$

das heißt durch die eingangs erwähnte Feldgröße  $2 \mathbf{v} \times \mathbf{n}$  bestimmt. Unter Beachtung der Gl. (17) ist es möglich, die Bernoullische Gleichung auf Punkte anzuwenden, die nicht der gleichen Stromlinie angehören.

Nach Gl. (18) hängt die Energieänderung von der Winkelgeschwindigkeit der Flüssigkeitsdrehung ab. Durch Einführung des Krümmungshalbmessers der Stromlinie erhält man nach einer einfachen, aber längeren Rechnung

$$\frac{dE}{dn} = \frac{d}{dn} \frac{v^2}{2} - \frac{v^2}{r} = v \left( \frac{dv}{dn} - \frac{v}{r} \right), \quad (19)$$

wenn  $n$  die innere Normale ist. Zur Bestimmung des Krümmungsradius muß demnach außer der Gesamtenergie noch der Anteil der kinetischen Energie an dieser bekannt sein. Umgekehrt ist bei gegebener Energieverteilung mit der Krümmung der Stromlinien die kinetische Energie bestimmt.

Im Falle  $dE = 0$  folgt aus Gl. (19) die bekannte Beziehung

$$v = v_0 e^{\int \frac{dn}{r}}, \quad (20)$$

auf welcher die Konstruktion von Flügel<sup>8</sup> beruht, und unter Zugrundelegung eines natürlichen Koordinatensystems

$$\frac{ds}{dn} = - \frac{\frac{\partial E}{\partial n}}{\frac{\partial E}{\partial s}} \quad (21)$$

Für die Wirbelströmung muß nach Gl. (19)

$$\frac{ds}{dn} = \frac{v \left( \frac{dv}{dn} - \frac{v}{r} \right) - \frac{\partial E}{\partial n}}{\frac{\partial E}{\partial s}} \quad (22)$$

sein.

Abschließend sei noch darauf hingewiesen, daß ähnliche Überlegungen auch für wirkliche Flüssigkeiten möglich sind. Setzt man an Stelle der Eulerschen Gleichung (1) die Bewegungsgleichung von Stokes-Navier

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{3} \nu \nabla (\nabla \mathbf{v}) + \nu \Delta \mathbf{v} \quad (23)$$

an, so erhält man durch analoge Umformung für stationäre Strömung

$$\nabla E - \frac{1}{3} \nu \nabla (\nabla \mathbf{v}) - \nu \Delta \mathbf{v} = 2 \mathbf{v} \times \mathbf{w}, \quad (24)$$

worin  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  die kinematische Zähigkeit bedeutet. Die Feldgröße  $2 \mathbf{v} \times \mathbf{w}$  bestimmt nun den Energiegradienten, abzüglich der durch Reibung und Kompressibilität bedingten Streuung. Die von  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{w}$  gebildeten Flächen sind keine Energieniveauflächen und der Energiegradient steht daher nicht mehr senkrecht zu ihnen. Man kann aber die Gl. (24) für jedes zu  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{w}$  komplanare Linienelement integrieren, falls es gelingt, die erwähnte Streuung längs dieses Weges zu ermitteln oder wenigstens einzuschätzen. Auf diese Weise erhält man die sogenannte erweiterte Bernoullische Gleichung.

Instationäre Strömungen könnten unter Berücksichtigung des Gliedes  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$  in ähnlicher Weise behandelt werden.

<sup>8</sup> G. Flügel: Ein neues Verfahren der graphischen Integration, usw. Diss. Oldenburg, 1914, oder auch Z. f. d. ges. Turbinenwesen (1915).

(Eingegangen am 16. Juni 1948.)



## Die elastische Aufstellung des starren Körpers.

Von A. Hochrainer, Wien.

Mit 3 Textabbildungen.

**Zusammenfassung.** Die räumlichen Eigenschwingungen des auf elastischer Unterlage aufgestellten starren Körpers werden in komplexer Darstellung mit den Methoden der Tensorrechnung behandelt. Die Wirkungen der federnden Unterlagen lassen sich in einfacher Weise durch drei Tensoren beschreiben, welche in Analogie zur Masse, dem statischen Moment und dem Trägheitsmoment stehen. Damit können die Eigenfrequenzen der freien und die Amplituden der aufgezungenen Schwingungen, die Richtungen der Schiebeschwingungen und die Achsen der Dreh-schwingungen in viel übersichtlicherer Form als mit den bisherigen Methoden berechnet werden. An die Diskussion einiger durch besondere Symmetrien ausgezeichnete Fälle schließt sich die zahlenmäßige Durchrechnung eines praktischen Beispiels.

**Summary.** The vibrations in space of a rigid body placed on an elastic support are treated in complex-quantities representation by tensor calculation. The effects of the elastic support may be described in a simple way by means of three tensors which are analogous to mass, statical moment and moment of inertia. With these tensors, the natural frequencies of the free and the amplitudes of the forced vibrations, the directions of the translatory and the axes of the torsional vibrations, can be calculated in a much clearer form than with methods used up to the present time. The discussion of some cases distinguished by specific symmetries is followed by the numerical computation of a practical problem.

**Résumé.** Les vibrations propres dans l'espace engendrées par un corps rigide placé sur un support élastique, sont traitées en représentation complexe avec les méthodes du calcul tensoriel. L'influence des supports élastiques peut être facilement définie par trois tenseurs qui sont analogues à la masse, au moment statique et au moment d'inertie. Avec ceux-ci, les fréquences propres des oscillations libres et les amplitudes des oscillations forcées, les directions des oscillations latérales et les axes des oscillations de torsion peuvent être déterminées d'une façon beaucoup plus claire qu'avec les méthodes classiques. La discussion de quelques cas caractérisés par des symétries particulières est suivie du calcul numérique d'un exemple pratique.

Um die Übertragung von Erschütterungen und Geräuschen von Maschinen auf ihre Fundamente zu unterdrücken, stellt man die Maschinen „elastisch“ auf, d. h. man schaltet zwischen Fundament und Maschinenkörper federnde Unterlagen ein, so daß sich die Maschine mehr oder weniger frei bewegen kann. Maßgebend für die Wirkung der elastischen Aufstellung ist das Verhältnis zwischen den Eigenfrequenzen der Maschine auf der federnden Unterlage zu den Frequenzen, deren Übertragung vermindert werden soll. Die Hauptaufgabe bei der Berechnung einer elastischen Aufstellung besteht daher in der Berechnung der Eigenschwingungen des aus Maschinen und Federn gebildeten Systems. Es handelt sich dabei um eine räumliche Anordnung, bei der eine ganze Reihe von Eigenschwingungen möglich ist. Zum Teil sind es „Schiebeschwingungen“, bei denen alle Punkte der Maschine die gleiche Geschwindigkeit aufweisen, zum Teil „Dreh-schwingungen“. Zu ihrer Feststellung hat man die allgemeine Bewegung eines starren Körpers auf federnder Unterlage zu untersuchen. Eine Behandlung eines in der Praxis häufigen Sonderfalles findet sich z. B. in dem Aufsatz „Federnde Lagerung von Kolbenmaschinen“ von H. Waas in Z. VDI Bd. 81, S. 763 (1937). Der dort behandelte Spezialfall liegt aber nicht immer vor, wie das am Ende dieses Berichtes gezeigte Beispiel erweist. Wir werden daher das Problem zunächst in seiner vollen Allgemeinheit behandeln, was mit Hilfe der Methoden der Tensorrechnung auch nicht viel schwieriger ist. Wir gewinnen dadurch nicht nur den Vorteil, auch andere Fälle verfolgen zu können, sondern erlangen auch noch eine bessere und allgemeinere Vorstellung von den dabei notwendigen besonderen Begriffen.

Die zu behandelnde Aufgabe lautet demnach: ein starrer Körper, bestehend aus einer Anzahl von Massenpunkten mit den Einzelmassen  $m$ , ist in einer Anzahl von Punkten auf Federn gelagert. Gefragt ist nach den Eigenschwingungen, die ein solcher

Körper auf den tragenden Federn ausführen kann. Weder die Massen  $m$  noch die einzelnen Federn brauchen untereinander gleich zu sein. Auch ist es gleichgültig, ob die Federn an mit Masse behafteten Punkten oder an masselosen Punkten des Körpers angreifen.

Ein beliebiger Punkt des Körpers habe die Geschwindigkeit  $v_i$  mit den drei Koordinaten  $v_1, v_2, v_3$ .<sup>1</sup> Bei der Schwingung ist  $v_i$  eine harmonische Funktion der Zeit

$$v_i = \dot{V}_i \cos(\omega t - \varphi_i) \quad (1)$$

mit der Kreisfrequenz  $\omega$  und den Phasenwinkeln  $\varphi_i$ .

$v_i$  läßt sich mit einer gleich großen imaginären, um eine Viertelperiode phasenverschobenen Geschwindigkeit

$$j \bar{v}_i = j \dot{V}_i \sin(\omega t - \varphi_i) \quad (2)$$

zu einer komplexen Geschwindigkeit

$$v_i = v_i + j \bar{v}_i = \dot{V}_i [\cos(\omega t - \varphi_i) + j \sin(\omega t - \varphi_i)] = \dot{V}_i e^{j(\omega t - \varphi_i)} \quad (3)$$

zusammensetzen. Man nennt

$$\mathfrak{B}_i = \dot{V}_i e^{-j\varphi_i} \quad (4)$$

die komplexe Amplitude der Geschwindigkeit. Sie ist bei einer räumlichen Bewegung ein Vektor mit drei komplexen Koordinaten. In jedem Punkt des Körpers wirkt eine momentane Kraft  $k_i$ , der im Falle einer schwingenden Bewegung eine komplexe Amplitude  $\mathfrak{K}_i$  entspricht. Die Kraft setzt sich im allgemeinen aus einer Massenkraft  $\mathfrak{K}_i^M$  und einer Federkraft  $\mathfrak{K}_i^F$  zusammen. Für die Massenkraft gilt wegen

$$k_i = m \frac{dv_i}{dt} \quad (5)$$

bei der komplexen Darstellung

$$\mathfrak{K}_i^M = j \omega m \mathfrak{B}_i \quad (6)$$

Bei der Federkraft müssen wir berücksichtigen, daß eine Feder einen Tensor darstellt. Denkt man sich beispielsweise einen auf einer Unterlage befestigten Gummiklotz an seinem freien Ende mit einer beliebig gerichteten Kraft beansprucht, so erkennt man, daß die zur Unterlage senkrechte Komponente der Kraft einen ganz anderen Federweg bewirken kann als die zur Unterlage parallele Komponente, da der Gummiklotz in der einen Richtung einen anderen Elastizitätsmodul aufweist als senkrecht dazu. Die Zusammensetzung der beiden Wegkomponenten liefert daher einen Weg  $S_i$ , der eine von der Kraft abweichende Richtung aufweist, auch wenn, wie wir hier voraussetzen, die Wege klein sind und daher für jede Komponente das Hooksche Gesetz als gültig angenommen werden kann. Es gilt daher

$$S_i = \int v_i dt = f_{ik} k_k \quad (7)$$

wobei  $f_{ik}$  der Federtensor ist. Den reziproken Tensor

$$c_{ik} = f_{ik}^{(-1)} \quad (8)$$

nennen wir den Steifigkeitstensor. Im Falle der Schwingung kann man (7) durch die komplexe Darstellung

$$\mathfrak{B}_i = j \omega f_{ik} \mathfrak{K}_k^F \quad (9)$$

ersetzen oder mit Benützung der Steifigkeit

$$\mathfrak{K}_k^F = \frac{c_{ik}}{j \omega} \mathfrak{B}_i \quad (10)$$

<sup>1</sup> Bezüglich der Schreibweise der Vektoren s. Duschek-Hochrainer: Grundzüge der Tensorrechnung in analytischer Darstellung. Wien: Springer-Verlag, 1946.

Die Gesamtkraft in einem Punkt ist dann

$$\mathfrak{R}_i = \mathfrak{R}_i^F + \mathfrak{R}_i^M = \mathfrak{B}_k \left( \frac{c_{ik}}{j\omega} + j\omega m \delta_{ik} \right). \quad (11)$$

Wir nennen den Tensor

$$g_{ik} = \frac{c_{ik}}{j\omega} + j\omega m \delta_{ik} \quad (12)$$

den Tensor der mechanischen Leitfähigkeit des Punktes und es ist

$$\mathfrak{R}_i = g_{ik} \mathfrak{B}_k. \quad (13)$$

Die Starrheit des Körpers läßt sich dadurch festlegen, daß die Entfernungen  $|y_i|$  aller möglichen Punktepaare  $x_i$  und  $\bar{x}_i$  des Körpers voneinander konstant bleiben, also

$$y_i y_i = (x_i - \bar{x}_i) (x_i - \bar{x}_i) = \text{konst.} \quad (14)$$

Wenn sich der Körper bewegt, sind  $x_i$ ,  $\bar{x}_i$  und  $y_i$  Funktionen der Zeit. Differenzieren wir (14) nach der Zeit, so ist

$$y_i \frac{dy_i}{dt} = (x_i - \bar{x}_i) \left( \frac{dx_i}{dt} - \frac{d\bar{x}_i}{dt} \right). \quad (15)$$

Wir nennen  $\mathfrak{B}_i$  die zu  $\frac{dx_i}{dt}$  gehörige komplexe Geschwindigkeit des Punktes  $x_i$ ,  $\bar{\mathfrak{B}}_i$  die zu  $\frac{d\bar{x}_i}{dt}$  gehörige komplexe Geschwindigkeit des Punktes  $\bar{x}_i$  und  $\mathfrak{Y}_i$  die zu  $\frac{dy_i}{dt}$  gehörige komplexe Geschwindigkeit der Strecke  $y_i$ , wobei wir unter der Geschwindigkeit einer Strecke die Differenz der Geschwindigkeiten der beiden Endpunkte der Strecke verstehen. (15) geht dann in

$$\mathfrak{Y}_i y_i = (\mathfrak{B}_i - \bar{\mathfrak{B}}_i) (x_i - \bar{x}_i) = 0 \quad (16)$$

über.<sup>2</sup> Die Geschwindigkeit einer Strecke auf dem starren Körper steht senkrecht auf die Strecke. Sie muß sich daher in der Form

$$\mathfrak{Y}_i = \varepsilon_{ijk} \mathfrak{B}_j y_k \quad (17)$$

darstellen lassen, wobei  $\mathfrak{B}_i$  zunächst ein willkürlicher Vektor sein kann, der nur nicht mit  $y_i$  gleichgerichtet sein darf. Die Geschwindigkeit des Punktes  $x_i$  läßt sich dann wegen

$$\mathfrak{Y}_i = \mathfrak{B}_i - \bar{\mathfrak{B}}_i \quad (18)$$

mit Hilfe der Geschwindigkeit  $\bar{\mathfrak{B}}_i$  von  $\bar{x}_i$  und von  $\mathfrak{B}_i$  ausdrücken

$$\mathfrak{B}_i = \varepsilon_{ijk} \mathfrak{B}_j (x_k - \bar{x}_k) + \bar{\mathfrak{B}}_i. \quad (19)$$

Genau so läßt sich natürlich die Geschwindigkeit eines anderen Punktes  $\bar{x}_i$  darstellen, wobei wir zunächst annehmen müssen, daß ein anderer Vektor  $\bar{\mathfrak{B}}_i$  einzusetzen ist.

$$\bar{\mathfrak{B}}_i = \varepsilon_{ijk} \bar{\mathfrak{B}}_j (\bar{x}_k - x_k) + \mathfrak{B}_i.$$

Da aber auch die Strecke  $\bar{x}_i - x_i$  dem Betrag nach konstant zu sein hat, so gilt

$$(\bar{\mathfrak{B}}_i - \mathfrak{B}_i) (\bar{x}_i - x_i) = 0$$

und wenn wir einsetzen

$$\varepsilon_{ijk} [\bar{\mathfrak{B}}_j (\bar{x}_k - x_k) - \mathfrak{B}_j (x_k - \bar{x}_k)] (\bar{x}_i - x_i) = 0$$

oder

$$\varepsilon_{ijk} [(\bar{\mathfrak{B}}_j - \mathfrak{B}_j) (-\bar{x}_k x_i + \bar{x}_k x_i - \bar{x}_k x_i)] = 0.$$

Diese Bedingung kann für beliebige  $x_i$  und  $\bar{x}_i$  nur erfüllt sein, wenn

$$\bar{\mathfrak{B}}_j = \mathfrak{B}_j. \quad (20)$$

<sup>2</sup> Man könnte natürlich auch für  $x_i$ ,  $\bar{x}_i$  und  $y_i$  die entsprechenden komplexen Wege einführen, doch bietet das im vorliegenden Fall keinen Vorteil.



Aber auch, wenn wir von  $\bar{x}_i$  zu einem anderen Bezugspunkt übergehen, darf sich der Wert von  $\mathfrak{B}_i$  nicht ändern. Wenn wir als diesen Bezugspunkt z. B.  $\bar{\bar{x}}_i$  wählen, so gilt sicher

$$\mathfrak{B}_i = \varepsilon_{ijk} \bar{\mathfrak{B}}_j (x_k - \bar{\bar{x}}_k) + \bar{\mathfrak{B}}_i.$$

Setzen wir für  $\bar{\mathfrak{B}}_i$  ein, so folgt

$$\mathfrak{B}_i = \varepsilon_{ijk} \bar{\mathfrak{B}}_j (x_k - \bar{\bar{x}}_k) + \varepsilon_{ijk} \mathfrak{B}_j (\bar{\bar{x}}_k - \bar{x}_k) + \bar{\mathfrak{B}}_i$$

und im Vergleich mit (19)

$$\varepsilon_{ijk} \mathfrak{B}_j (x_k - \bar{x}_k) = \varepsilon_{ijk} [\bar{\mathfrak{B}}_j (x_k - \bar{\bar{x}}_k) + \mathfrak{B}_j (\bar{\bar{x}}_k - \bar{x}_k)],$$

$$\varepsilon_{ijk} \mathfrak{B}_j (x_k - \bar{\bar{x}}_k) + \varepsilon_{ijk} \mathfrak{B}_j (\bar{\bar{x}}_k - \bar{x}_k) = \varepsilon_{ijk} \bar{\mathfrak{B}}_j (x_k - \bar{\bar{x}}_k) + \varepsilon_{ijk} \mathfrak{B}_j (\bar{\bar{x}}_k - \bar{x}_k),$$

$$\varepsilon_{ijk} (\mathfrak{B}_j - \bar{\mathfrak{B}}_j) (x_k - \bar{\bar{x}}_k) = 0,$$

was für beliebige  $x_i$  nur gültig sein kann, wenn

$$\mathfrak{B}_j = \bar{\mathfrak{B}}_j. \quad (21)$$

$\mathfrak{B}_j$  ist also ein für den ganzen starren Körper bei der Bewegung charakteristischer Vektor, den man seine Winkelgeschwindigkeit nennt. Die Geschwindigkeit jedes Punktes läßt sich durch die Winkelgeschwindigkeit und die Geschwindigkeit eines beliebigen Bezugspunktes ausdrücken. Die Richtung von  $\mathfrak{B}_i$  ist die Richtung der momentanen Drehachse.  $\mathfrak{B}_i$  ist bestimmt, wenn die Geschwindigkeiten von drei Punkten des Körpers gegeben sind. Bezeichnen wir die Punkte mit  $x_i$ ,  $\bar{x}_i$  und  $\bar{\bar{x}}_i$  und die Geschwindigkeiten dementsprechend, so ist

$$\mathfrak{B}_i = \frac{\varepsilon_{ijk} (\mathfrak{B}_j - \mathfrak{B}_j) (\bar{\bar{x}}_k - \mathfrak{B}_k)}{(\mathfrak{B}_p - \mathfrak{B}_p) (\bar{\bar{x}}_p - x_p)}, \quad (22)$$

wovon man sich durch Einsetzen in den Zähler entsprechend (19) leicht überzeugt. Führen wir noch den Schwerpunkt (Massenmittelpunkt) ein, dessen Koordinaten durch die Formel

$$x_i^s \Sigma m = \Sigma x_i m \quad (23)$$

definiert sind, so läßt sich die Bewegung jedes Punktes auf die Bewegung ( $\mathfrak{B}_i^s$ ) des Schwerpunktes und auf eine Drehung um den Schwerpunkt mit der Winkelgeschwindigkeit  $\mathfrak{B}_i$  zurückführen.

$$\mathfrak{B}_i = \varepsilon_{ijk} (x_k - x_k^s) \mathfrak{B}_j + \mathfrak{B}_i^s. \quad (24)$$

Beim starren Körper kann man die Kräfte  $\mathfrak{R}_i$  in den einzelnen Punkten zu einer resultierenden Kraft  $\mathfrak{P}_i$  zusammenfassen.

$$\mathfrak{P}_i = \Sigma \mathfrak{R}_i = \Sigma g_{ik} \mathfrak{B}_k. \quad (25)$$

Ebenso läßt sich ein resultierendes Moment bilden

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_i &= \Sigma \varepsilon_{ijk} x_j \mathfrak{R}_k \\ &= \Sigma \varepsilon_{ijk} x_j g_{km} \mathfrak{B}_m. \end{aligned} \quad (26)$$

Wir werden weiterhin den Schwerpunkt  $x_i^s$  als Bezugspunkt verwenden und bezeichnen die Verbindungsstrecken der einzelnen Punkte des Körpers mit dem Schwerpunkt mit  $y_i$ , also

$$y_i = x_i - x_i^s. \quad (27)$$

Dann ist

$$\mathfrak{M}_i = \Sigma \varepsilon_{ijk} y_j g_{km} \mathfrak{B}_m. \quad (28)$$

Aus (25) zusammen mit (24) und (12) folgt

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_i &= \Sigma \left( \frac{c_{ik}}{j\omega} + j\omega m \delta_{ik} \right) (\varepsilon_{klm} \mathfrak{B}_l y_m + \mathfrak{B}_k^s) \\ &= \frac{1}{j\omega} (\varepsilon_{klm} \mathfrak{B}_l \Sigma c_{ik} y_m - \varepsilon_{ilm} \omega^2 \mathfrak{B}_l \Sigma m y_m + \mathfrak{B}_k^s \Sigma c_{ik} - \omega^2 \mathfrak{B}_i^s \Sigma m). \end{aligned} \quad (29)$$

Das zweite Glied rechts verschwindet wegen (23). Es ist zweckmäßig, folgende Bezeichnungen einzuführen:

$$\text{Weg des Schwerpunktes} \quad \mathfrak{S}_i = \frac{1}{j\omega} \mathfrak{B}_i^s, \quad (30)$$

$$\text{Drehwinkel um den Schwerpunkt} \quad \Phi_i = \frac{1}{j\omega} \mathfrak{B}_i, \quad (31)$$

$$\text{Gesamtmasse des Körpers} \quad M = \sum m, \quad (32)$$

$$\text{Gesamtsteifigkeit aller Federn} \quad C_{ik} = \sum c_{ik}, \quad (33)$$

$$\text{Federmoment} \quad D_{il} = \sum \varepsilon_{klm} c_{ik} y_m. \quad (34)$$

Dann läßt sich (29) in folgender Form schreiben:

$$\mathfrak{P}_i = \Phi_l D_{il} + \mathfrak{S}_k (C_{ik} - \omega^2 M \delta_{ik}). \quad (35)$$

In ähnlicher Weise formen wir jetzt den Ausdruck für das Drehmoment um.

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_i &= \sum \varepsilon_{ikl} y_k g_{lm} \mathfrak{B}_m, \\ &= \sum \varepsilon_{ikl} y_k \left( \frac{c_{lm}}{j\omega} + \delta_{lm} j\omega m \right) (\varepsilon_{mpq} \mathfrak{B}_p y_q + \mathfrak{B}_m^s), \\ &= \Phi_p \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{mpq} \sum c_{lm} y_k y_q - \omega^2 \Phi_p \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{lpq} \sum m y_k y_q + \mathfrak{S}_m \varepsilon_{ikl} \sum c_{lm} y_k + \\ &\quad + \varepsilon_{ikl} \mathfrak{S}_l \sum m y_k. \end{aligned}$$

Das letzte Glied auf der rechten Seite verschwindet. Wir bezeichnen mit  $E_{ip}$  den Tensor

$$E_{ip} = \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{mpq} \sum c_{lm} y_k y_q. \quad (36)$$

Ferner ist  $\varepsilon_{ikl} \sum c_{lm} y_k$  durch Indizesvertauschung überführbar in  $\varepsilon_{klm} \sum c_{ki} y_m$  und da der Federtensor und damit auch der Steifigkeitstensor symmetrisch ist, also

$$c_{ik} = c_{ki}$$

$$\varepsilon_{klm} \sum c_{ki} y_m = \varepsilon_{kilm} \sum c_{ik} y_m = D_{il}.$$

Schließlich ist

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{lpq} \sum m y_k y_q &= (\delta_{ip} \delta_{kq} - \delta_{iq} \delta_{kp}) \sum m y_k y_q \\ &= \delta_{ip} \sum m y_k y_k - \sum m y_i y_p \\ &= I_{ip}. \end{aligned} \quad (37)$$

$I_{ip}$  ist der Trägheitstensor des Körpers, auf den Schwerpunkt bezogen. Damit läßt sich nun das Drehmoment auf folgende Form bringen:

$$\mathfrak{M}_i = \Phi_p (E_{ip} - \omega^2 I_{ip}) + \mathfrak{S}_k D_{ki}. \quad (38)$$

Die beiden Formeln (35) und (38) beschreiben die Bewegung des federnd gelagerten starren Körpers. Bemerkenswert ist die weitgehende Analogie der beiden Gleichungen und die Analogie der durch die Definitionen (33), (34) und (36) eingeführten Größen für die Zusammenfassung der Wirkungen der Federn mit den bekannten Größen für die Massen.  $C_{ik}$  entspricht der Gesamtmasse  $M$ ,  $D_{ik}$  entspricht dem Massenmoment, das in unserem Fall, wo wir den Schwerpunkt als Bezugspunkt wählten, verschwindet. Im allgemeinen ist es aber nicht möglich, in Analogie zum Schwerpunkt als Massenmittelpunkt, einen „Federmittelpunkt“ zu definieren. Würden wir die Koordinaten eines solchen Punktes mit  $a_i$  bezeichnen, so müßten sie die Gleichungen

$$\varepsilon_{klm} a_m C_{ki} = \varepsilon_{kilm} \sum c_{ik} y_m \quad (39)$$

erfüllen. Das sind im allgemeinen 9 Gleichungen, die nicht von einem einzigen Wertetripel  $a_i$  befriedigt werden können. In Sonderfällen, wie bei den später behandelten symmetrischen Lagerungen, ist dies aber möglich. Die Größe  $E_{ik}$  ist das Analogon zum Trägheitstensor  $I_{ik}$ , wie man durch Vergleich von (36) und (37) erkennt. Wir

können (35) und (38) noch übersichtlicher schreiben, wenn wir folgende Bezeichnungen einführen:

$$G_{ik} = C_{ik} - \omega^2 M \delta_{ik}, \quad (40)$$

$$H_{ik} = E_{ik} - \omega^2 I_{ik}. \quad (41)$$

Dann ist

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{P}_i &= \Phi_k D_{ik} + \mathfrak{S}_k G_{ik}, \\ \mathfrak{M}_i &= \Phi_k H_{ik} + \mathfrak{S}_k D_{ki}. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Bei gegebenen  $\mathfrak{P}_i$  und  $\mathfrak{M}_i$  können wir aus (42)  $\Phi_i$  und  $\mathfrak{S}_i$  berechnen und haben damit die Bewegung des Körpers beschrieben. Eigenschwingungen des Körpers sind dadurch charakterisiert, daß entweder  $\Phi_i$  oder  $\mathfrak{S}_i$  oder beide vorhanden sind, auch wenn jede Erregung fehlt, also wenn  $\mathfrak{P}_i$  und  $\mathfrak{M}_i$  verschwinden. Dann gelten die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \Phi_k D_{ik} + \mathfrak{S}_k G_{ik} &= 0, \\ \Phi_k H_{ik} + \mathfrak{S}_k D_{ki} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Dieses System von sechs linearen homogenen Gleichungen für die sechs Größen der Koordinaten von  $\Phi_i$  und  $\mathfrak{S}_i$  kann nur dann nicht triviale (von Null verschiedene) Lösungen haben, wenn die Determinante der Koeffizienten verschwindet, also wenn

$$\begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & G_{31} & G_{32} & G_{33} \\ H_{11} & H_{12} & H_{13} & D_{11} & D_{21} & D_{31} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & D_{12} & D_{22} & D_{32} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{vmatrix} = 0. \quad (44)$$

Setzt man für die verschiedenen Größen der Elemente dieser Determinante ein, so erhält man eine Gleichung 6. Grades für  $\omega^2$ . Die sechs Lösungen dieser Gleichung geben die Eigenfrequenzen  $\omega_0$  der sechs möglichen Eigenschwingungen des starren Körpers auf den Federn an. Sie entsprechen den sechs Freiheitsgraden des starren Körpers. Für jeden Eigenwert  $\omega_0^2$  ergibt sich aus (43) ein Wertepaar  $\Phi_i, \mathfrak{S}_i$ , abgesehen vom Betrag dieser Vektoren, und dadurch sind die Richtung der Schwerpunktsbewegung und die der Drehachse durch den Schwerpunkt bestimmt. Im allgemeinen ist keine der Eigenschwingungen eine reine Schiebeschwingung, sondern jede ist mit einer Drehschwingung um eine bestimmte, durch den Schwerpunkt gehende Achse gekoppelt.

Die Gl. (44) beschreibt den allgemeinsten Fall in der allgemeinsten Lage. In der Praxis liegen nun meist besondere Symmetrieverhältnisse vor, die man bei der Ausrechnung von (44) mit Vorteil benützen wird, und zwar in der Weise, daß man das spezielle bei der Rechnung zu benützende Koordinatensystem in die Symmetriachsen und -ebenen legt. Ein besonders günstiger Fall liegt bei der sog. „symmetrischen“ Lagerung vor. Sie ist in unserer Ausdrucksweise dadurch gekennzeichnet, daß die Federmomente  $D_{ik}$ , auf den Schwerpunkt bezogen, verschwinden. In diesem Fall existiert ein Federmittelpunkt, der mit dem Schwerpunkt zusammenfällt. Ein solcher Fall liegt beispielsweise vor, wenn alle Steifigkeitstensoren  $c_{ik}$  einander gleich sind und außerdem die Angriffspunkte der Federn symmetrisch zum Schwerpunkt liegen, so daß für sie  $\sum y_i = 0$  ist. Setzen wir in (44) alle  $D_{ik}$  gleich Null, dann reduziert sich (44) auf

$$\text{Det } G_{ik} \cdot \text{Det } H_{ik} = 0, \quad (45)$$



und diese Gleichung zerfällt in die beiden Gleichungen

$$\text{Det } G_{ik} = 0 \quad (46)$$

und

$$\text{Det } H_{ik} = 0. \quad (47)$$

(46) lautet ausführlich geschrieben

$$\text{Det } (C_{ik} - \omega^2 M \delta_{ik}) = 0, \quad (48)$$

und diese Gleichung dritten Grades liefert drei Werte  $\omega_0^2$  der Schiebeschwingungen, die sämtliche reine Schiebeschwingungen sind. Da  $C_{ik}$  ein symmetrischer Tensor ist, so müssen die zu den Eigenwerten gehörigen Eigenrichtungen mit den Hauptachsen des Tensors übereinstimmen und aufeinander senkrecht stehen.

(47) liefert:

$$\text{Det } (E_{ik} - \omega^2 I_{ik}) = 0, \quad (49)$$

und daraus folgen drei Werte  $\omega_0^2$  von reinen Drehschwingungen. Die  $E_{ik}$  bilden einen symmetrischen Tensor und ebenso die  $I_{ik}$ , und so stehen die Achsen der drei Drehschwingungen ebenfalls aufeinander senkrecht. Sie müssen nicht unbedingt mit den Richtungen der Schiebeschwingungen zusammenfallen, sondern nur dann, wenn die Hauptachsen des Trägheitstensors mit denen von  $C_{ik}$  zusammenfallen. Die Aufteilung der Eigenschwingungen in reine Schiebeschwingungen und reine Drehschwingungen um durch den Schwerpunkt gehende Achsen setzt

nicht nur die Gleichheit der einzelnen, den Körper stützenden Federn voraus, sondern auch noch deren symmetrische Anordnung bezüglich des Schwerpunktes. Diese zweite Forderung ist aber in den meisten Fällen nicht erfüllt, sondern die Angriffspunkte der Federn liegen meist einseitig außerhalb des Schwerpunktes. In diese Gruppe gehört auch das von H. Waas in dem erwähnten Aufsatz behandelte Beispiel, dem wir uns jetzt zuwenden.

Ein prismatischer Körper ist entsprechend Abb. 1 auf untereinander gleichen Federn in einer Ebene unterhalb des Schwerpunktes gelagert. Wir legen das Koordinatensystem mit dem Ursprung in den Schwerpunkt, so daß die 3-Achse senkrecht nach oben zeigt, während die 2-Achse und die 1-Achse parallel zu den Kanten des Quaders verlaufen. Wir nehmen ferner an, daß die Hauptachsen der Federtensoren in die Richtung der Koordinatenachsen fallen, so daß die  $c_{ik}$  folgende Gestalt haben:

$$c_{ik} = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} \end{pmatrix}; \quad (50)$$

dann gilt für  $C_{ik} = \Sigma c_{ik} = 4 c_{ik}$

$$C_{ik} = \begin{pmatrix} C_{11} & 0 & 0 \\ 0 & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{pmatrix}. \quad (51)$$

Für die Angriffspunkte der Federn gilt, daß die Koordinaten der Punkte hinsichtlich  $y_1$  und  $y_2$  paarweise entgegengesetzt gleich sind, während alle  $y_3$  einander gleich

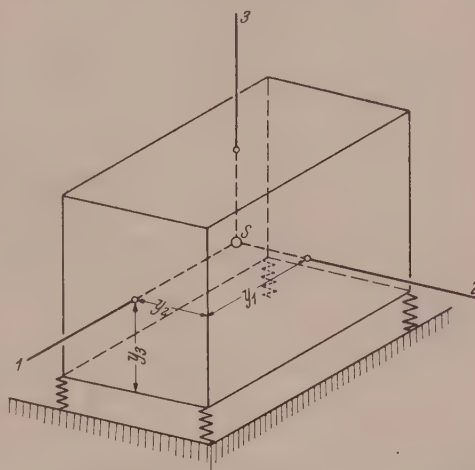


Abb. 1.

sind. Deshalb und wegen der Gleichheit der Federtensoren läßt sich hier ein Federmittelpunkt angeben, der die Koordinaten

$$\alpha_i = (0, 0, y_3)$$

hat. Für die  $D_{ik}$  finden wir

$$D_{11} = \varepsilon_{k1m} \Sigma c_{1k} y_m = 0,$$

da bei  $k = 1$  der  $\varepsilon$ -Tensor verschwindet und bei  $k \neq 1$   $c_{1k} = 0$ . Auf Grund ähnlicher Überlegungen finden wir

$$\begin{aligned} D_{22} &= \varepsilon_{k2m} \Sigma c_{2k} y_m = 0, \\ D_{33} &= \varepsilon_{k3m} \Sigma c_{3k} y_m = 0, \\ D_{12} &= \varepsilon_{k2m} \Sigma c_{1k} y_m = \varepsilon_{123} C_{11} y_3 = C_{11} y_3, \\ D_{21} &= \varepsilon_{k1m} \Sigma c_{2k} y_m = \varepsilon_{213} C_{22} y_3 = -C_{22} y_3, \\ D_{13} &= \varepsilon_{k3m} \Sigma c_{1k} y_m = \varepsilon_{132} C_{11} \Sigma y_2 = 0, \\ D_{31} &= \varepsilon_{k1m} \Sigma c_{3k} y_m = \varepsilon_{312} C_{33} \Sigma y_2 = 0, \\ D_{23} &= \varepsilon_{k3m} \Sigma c_{2k} y_m = \varepsilon_{231} C_{22} \Sigma y_1 = 0, \\ D_{32} &= \varepsilon_{k2m} \Sigma c_{3k} y_m = \varepsilon_{321} C_{33} \Sigma y_1 = 0, \end{aligned}$$

also

$$D_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & y_3 C_{11} & 0 \\ -y_3 C_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (52)$$

In ähnlicher Weise läßt sich  $E_{ik}$  berechnen und wir erhalten z. B.

$$\begin{aligned} E_{11} &= \varepsilon_{132} \varepsilon_{213} \Sigma c_{22} y_3 y_3 + \varepsilon_{123} \varepsilon_{312} \Sigma c_{33} y_2 y_2 \\ &= y_3^2 C_{22} + y_2^2 C_{33} \end{aligned}$$

und so weiter. Das Endergebnis lautet:

$$E_{ik} = \begin{pmatrix} y_3^2 C_{22} + y_2^2 C_{33} & 0 & 0 \\ 0 & y_3^2 C_{11} + y_1^2 C_{33} & 0 \\ 0 & 0 & y_2^2 C_{11} + y_1^2 C_{22} \end{pmatrix}. \quad (53)$$

Wir stellen noch fest, daß wegen der Symmetrie des Quaders bezüglich der Koordinatenachsen auch die Trägheitshauptachsen mit den Koordinatenachsen zusammenfallen und sich daher  $I_{ik}$  in folgender Form darstellt:

$$I_{ik} = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix}. \quad (54)$$

Wir finden ferner

$$G_{ik} = \begin{pmatrix} C_{11} - \omega^2 M & 0 & 0 \\ 0 & C_{22} - \omega^2 M & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} - \omega^2 M \end{pmatrix}, \quad (55)$$

und

$$H_{ik} = \begin{pmatrix} y_3^2 C_{22} + y_2^2 C_{33} - \omega^2 I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & y_3^2 C_{11} + y_1^2 C_{33} - \omega^2 I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & y_2^2 C_{11} + y_1^2 C_{22} - \omega^2 I_{33} \end{pmatrix}. \quad (56)$$

Damit nimmt die Determinante (44) die Form an:

$$\begin{vmatrix} 0 & D_{12} & 0 & G_{11} & 0 & 0 \\ D_{21} & 0 & 0 & 0 & G_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{33} \\ H_{11} & 0 & 0 & 0 & D_{21} & 0 \\ 0 & H_{22} & 0 & D_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_{33} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Sie läßt sich leicht auflösen und wir finden

$$\begin{aligned} & H_{33} G_{33} \left( G_{11} \begin{vmatrix} D_{21} & 0 & G_{22} \\ H_{11} & 0 & D_{21} \\ 0 & H_{22} & 0 \end{vmatrix} - D_{12} \begin{vmatrix} D_{21} & 0 & G_{22} \\ H_{11} & 0 & D_{21} \\ 0 & D_{12} & 0 \end{vmatrix} \right) \\ & = H_{33} G_{33} (G_{11} H_{22} - D_{12} D_{12}) (G_{22} H_{11} - D_{21} D_{21}) = 0. \end{aligned} \quad (57)$$

Diese Gleichung zerfällt in vier einzelne Gleichungen, und zwar:

$$G_{33} = C_{33} - \omega^2 M = 0; \quad (58)$$

(58) liefert eine reine Schiebeschwingung in der 3-Richtung.

$$H_{33} = y_2^2 C_{11} + y_1^2 C_{22} - \omega^2 I_{33} = 0. \quad (59)$$

Daraus folgt eine reine Drehschwingung um die 3-Achse. Die dritte Gleichung lautet:

$$G_{11} H_{22} - D_{12} D_{12} = (C_{11} - \omega^2 M) (C_{11} y_3^2 + C_{33} y_1^2 - \omega^2 I_{22}) - c_{11}^2 y_3^2 = 0. \quad (60)$$

oder geordnet

$$\omega^4 M I_{22} - \omega^2 (C_{11} I_{22} + C_{11} M y_3^2 + C_{33} M y_1^2) + C_{11} C_{33} y_1^2 = 0. \quad (61)$$

Die beiden Lösungen dieser Gleichung lauten:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{C_{11}}{M} + \frac{C_{11} y_3^2 + C_{33} y_1^2}{I_{22}} \right) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{C_{11}}{M} + \frac{C_{11} y_3^2 + C_{33} y_1^2}{I_{22}} \right)^2 - 4 \frac{C_{11} C_{33} y_1^2}{M I_{22}}}. \quad (62)$$

Führt man den Trägheitsradius  $i_2$  ein, entsprechend der Formel

$$I_{22} = i_2^2 M, \quad (63)$$

dann läßt sich (62) in eine der beiden folgenden Formen bringen:

$$\begin{aligned} \omega_{1,2}^2 &= \frac{1}{2M} \left[ C_{11} + C_{11} \left( \frac{y_3}{i_2} \right)^2 + C_{33} \left( \frac{y_1}{i_2} \right)^2 \pm \right. \\ &\quad \left. \pm \sqrt{C_{11} + C_{11} \left( \frac{y_3}{i_2} \right)^2 + C_{33} \left( \frac{y_1}{i_2} \right)^2 - 4 C_{11} C_{33} \left( \frac{y_1}{i_2} \right)^2} \right] \end{aligned}$$

oder

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2I_{22}} [C_{11} i_2^2 + C_{11} y_3^2 + C_{33} y_1^2 \pm \sqrt{(C_{11} i_2^2 + C_{11} y_3^2 + C_{33} y_1^2)^2 - 4 C_{11} C_{33} y_1^2}].$$

Die Lage der Drehachsen bzw. die Richtungen der Schwerpunktsbewegungen können aus (43) abgeleitet werden. Diese Gleichungen reduzieren sich für die eben abgeleiteten Eigenschwingungen auf

$$\Phi_2 D_{12} + \mathfrak{S}_1 G_{11} = 0,$$

$$\Phi_2 H_{22} + \mathfrak{S}_1 D_{12} = 0.$$

Die Achse der Drehung fällt also in die 2-Richtung und die Schwerpunktsbewegung in die 1-Richtung, und zwar gilt das für beide durch (62) festgelegten Eigenschwingungen. Wir können jetzt auch die Lage der Drehachsen herleiten. Ihre Punkte bleiben



bei der Bewegung in Ruhe. Für ihren Punkt auf der 3-Achse im Abstand  $r$  vom Schwerpunkt gilt daher

$$r \Phi_2 + \mathfrak{S}_1 = 0. \quad (64)$$

Setzen wir darnach in die beiden Gleichungen ein, so folgt

$$\begin{aligned} D_{12} - r G_{11} &= 0, \\ H_{22} - r D_{12} &= 0. \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir die beiden Ergebnisse

$$r = \frac{D_{12}}{G_{11}} = \frac{H_{22}}{D_{12}}$$

und wenn wir einsetzen

$$r = \frac{C_{11} y_3}{C_{11} - \omega^2 M} = \frac{C_{11} y_3^2 + C_{33} y_1^2 - \omega^2 I_{22}}{C_{11} y_3}. \quad (65)$$

Die beiden Ausdrücke müssen natürlich wegen (60) identisch sein.

In ganz gleicher Weise, wie eben gezeigt, läßt sich die vierte Gleichung

$$G_{22} H_{11} - D_{21} D_{21} = 0 \quad (66)$$

behandeln. Sie führt zunächst auf

$$(C_{22} - \omega^2 M) (C_{22} y_3^2 + C_{33} y_2^2 - \omega^2 I_{11}) - C_{22}^2 y_3^2 = 0,$$

dann auf

$$\omega^4 M I_{11} - \omega^2 (C_{22} I_{11} + M C_{22} y_3^2 + M C_{33} y_2^2) + C_{22} C_{33} y_2^2 = 0$$

und schließlich auf

$$\begin{aligned} \omega_{1,2}^2 &= \frac{1}{2} \left( \frac{C_{22}}{M} + \frac{C_{22} y_3^2 + C_{33} y_2^2}{I_{11}} \right) \pm \\ &\pm \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{C_{22}}{M} + \frac{C_{22} y_3^2 + C_{33} y_2^2}{I_{11}} \right)^2 - 4 \frac{C_{22} C_{33} y_2^2}{M I_{11}}}. \end{aligned} \quad (67)$$

Für die Richtung der Drehachse und der Schwerpunktsbewegung gelten die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 D_{21} + \mathfrak{S}_2 G_{22} &= 0, \\ \Phi_1 H_{11} + \mathfrak{S}_2 D_{21} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

Die Drehung erfolgt parallel zur 1-Achse. Wir setzen jetzt

$$r \Phi_1 + \mathfrak{S}_2 = 0$$

und erhalten

$$r = \frac{D_{21}}{G_{22}} = \frac{H_{11}}{D_{21}}$$

oder, wenn wir einsetzen, die beiden identischen Ausdrücke

$$r = \frac{-C_{22} y_3}{C_{22} - \omega^2 M} = -\frac{C_{22} y_3^2 + C_{33} y_2^2 - \omega^2 I_{11}}{C_{22} y_3}. \quad (69)$$

Auch diese Gleichung liefert zwei Radien, je nach den Werten von  $\omega^2$ , die beide in der 3-Richtung liegen.

Wir sehen, daß das auf Federn unterhalb des Schwerpunktes symmetrisch gelagerte Prisma sechs Eigenschwingungen ausführen kann, von denen trotz der ziemlich weitgehenden Symmetrie der Anordnung nur eine einzige eine reine Schiebeschwingung ist, während die anderen fünf Drehschwingungen sind. Eine von diesen hat eine durch den Schwerpunkt laufende Drehachse. Die Achsen der anderen sind paarweise zueinander parallel und es verläuft je eine der Achsen oberhalb und die andere unterhalb des Schwerpunktes.

Fragen wir jetzt noch nach den Drehwinkeln und den Schwerpunktsbewegungen bei Erregungen außerhalb der Eigenfrequenz, so brauchen wir dazu nur die Gl. (42) mit den speziellen Werten der Koeffizienten aufzustellen. Wir erhalten

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{P}_1 &= \Phi_2 D_{12} + \mathfrak{S}_1 G_{11}, \\ \mathfrak{P}_2 &= \Phi_1 D_{21} + \mathfrak{S}_2 G_{22}, \\ \mathfrak{P}_3 &= \mathfrak{S}_3 G_{33} \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

und

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{M}_1 &= \Phi_1 H_{11} + \mathfrak{S}_2 D_{21}, \\ \mathfrak{M}_2 &= \Phi_2 H_{22} + \mathfrak{S}_1 D_{12}, \\ \mathfrak{M}_3 &= \Phi_3 H_{33}. \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

$\mathfrak{P}_3$  und  $\mathfrak{M}_3$  liefern ganz unabhängige Bewegungen.  $\mathfrak{P}_1$  und  $\mathfrak{M}_2$  wirken zusammen und ebenso  $\mathfrak{P}_2$  und  $\mathfrak{M}_1$ . Die Unabhängigkeit bzw. Kopplung der Bewegungen, wie wir sie bei den Eigenfrequenzen gefunden haben, bleiben also auch bei Erregung mit irgend welchen anderen Frequenzen bestehen. Die Berechnung der entstehenden Ausschläge für einen speziellen Fall bietet keine besonderen Schwierigkeiten. Bemerkenswert ist, daß z. B. bei einer Erregung durch  $\mathfrak{P}_1$  und  $\mathfrak{M}_2$  die Richtung der Drehachse der erzwungenen Bewegung genau so wie bei der entsprechenden Eigenschwingung parallel zur 2-Achse ist, der Abstand der Momentandrehachse vom Schwerpunkt aber ein anderer wird. Setzen wir zur Berechnung der räumlichen Lage wieder  $r \Phi_2$  an Stelle von  $\mathfrak{S}_1$ , so folgt

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_1 &= \Phi_2 (D_{12} + r G_{11}), \\ \mathfrak{M}_2 &= \Phi_2 (H_{22} + r D_{12}). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$r = - \frac{\mathfrak{P}_1 H_{22} - \mathfrak{M}_2 D_{22}}{\mathfrak{P}_1 D_{12} - \mathfrak{M}_2 G_{11}}. \quad (72)$$

Sind  $\mathfrak{P}_1$  und  $\mathfrak{M}_2$  von der gleichen Frequenz, dann ergibt sich eine Drehachse, die während der ganzen Zeit in ihrer Lage festbleibt. Sind  $\mathfrak{P}_1$  und  $\mathfrak{M}_2$  aber Erregungen verschiedener Frequenz, dann ändert die Drehachse ihre Lage ebenfalls periodisch mit der Zeit. Die Lage der Drehachse hängt auch noch von der Größe von  $\mathfrak{P}_1$  und  $\mathfrak{M}_2$  ab. Man erkennt aus (72) auch sofort, daß sich bei Erregung mit  $\mathfrak{P}_1$  allein eine andere Lage der Achse ergeben muß als bei Erregung mit  $\mathfrak{M}_2$  allein. Nur im Falle der Resonanz fallen diese beiden Achsen zusammen.

Es bleibt noch zu zeigen, daß sich die abgeleiteten Formeln auch zur zahlenmäßigen Behandlung praktischer Fälle eignen. H. Waas hat in dem erwähnten Aufsatz für den von ihm behandelten Sonderfall der symmetrischen Lagerung die notwendigen Formeln in Tabellenform zusammengestellt und es wurde in der Praxis vielfach nach diesen Formeln gerechnet. Schwierig wurden die Aufgaben nur, wenn der diesen Formeln zugrunde gelegte Sonderfall nicht vorlag. Man half sich dann mit Ersatzanordnungen, die eine Anpassung an die Voraussetzungen der Formeln erreichen sollten. Dabei konnten aber leicht Fehler eintreten, als ja gar nicht erwiesen ist, daß sich jeder zu behandelnde Fall auf diesen einen Sonderfall zurückführen lassen muß, und im allgemeinen ist das sogar bestimmt nicht der Fall. Es erscheint daher zweckmäßiger, sich überhaupt nicht auf einen mehr oder weniger willkürlichen Sonderfall zu stützen, denn die hier abgeleiteten allgemeinen Formeln erlauben die Behandlung jeder einschlägigen Aufgabe, ohne daß man noch zu besonderen Hilfsmitteln greifen müßte. Natürlich wird man in jedem Fall versuchen, sich durch Ausnützung der vorhandenen Symmetrieeigenschaften der Aufgabe die Rechenarbeit möglichst zu vereinfachen. Die Wahl eines der Aufgabe im speziellen angepaßten Koordinatensystems ist aber bei zahlenmäßig zu behandelnden Aufgaben in keiner Weise mit einer Einschränkung der Gültigkeit der Ergebnisse verbunden.

Zur Illustration des eben Gesagten behandeln wir jetzt ein Beispiel, und zwar handelt es sich um die elastische Aufstellung eines Kreiselkompasses auf Schiffen, wobei die Angaben einer Berechnung der Schiffs- und Maschinenbauanstalt Kiel entnommen sind. Die Abb. 2 zeigt den Kompaß im Aufriß und auch die Anordnung der ihn tragenden Gummiklötze. Das Gewicht des Kompasses beträgt 225 kg. Der Abstand zwischen dem Schwerpunkt und der Mittelebene der ihn tragenden Gummischienen beträgt 32,5 cm. Der Trägheitsradius um die vertikale Achse, die wir zur

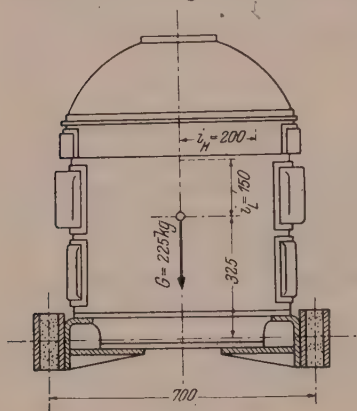


Abb. 2.

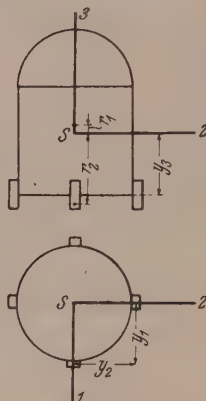


Abb. 3.

3-Achse unseres Koordinatensystems wählen, ist mit  $i_3 = 0,2$  m angegeben. Der Trägheitsradius um jede horizontale Achse beträgt  $i_1 = i_2 = 0,15$  m. Daher sind

$$I_{11} = I_{22} = 225 \cdot 0,15^2 = 5 \text{ kgm}^2,$$

$$I_{33} = 225 \cdot 0,20^2 = 9 \text{ kgm}^2.$$

Die vier Federn, die den Kompaß tragen sollen, werden durch Gummischienen (Schwingmetallschienen) der Gummitype DVM 80 mit den genormten Abmessungen  $150 \times 50 \times 50 \text{ mm}^3$  gebildet. Wie die Abbildung zeigt, liegen die Schienen ver-

tikal, so daß sie in horizontaler Richtung auf Druck beansprucht werden. Der Elastizitätsmodul ist in der Druckrichtung mit

$$E = 40 \text{ kp/cm}^2 = 390 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2$$

angenommen.<sup>3</sup> Für die Federung in der Druckrichtung erhalten wir

$$F = \frac{0,05}{0,15 \cdot 0,05 \cdot 390 \cdot 10^4} = 1,715 \cdot 10^{-6} \text{ m/N}$$

und für die zugehörige Steifigkeit

$$c = 1/F = 585000 \text{ N/m}.$$

In der zur Druckrichtung senkrechten Richtung gilt ein Schubmodul, der ungefähr mit

$$G = 6,67 \text{ kp/cm}^2 = 66 \cdot 10^4 \text{ N/m}$$

angenommen werden kann. Die Steifigkeit in dieser Richtung ist dann

$$c = \frac{66 \cdot 10^4 \cdot 0,15 \cdot 0,05}{0,05} = 99 \cdot 10^3 \text{ N/m}.$$

Die Abb. 3 zeigt noch einmal schematisch die Anordnung der Gummiklötze. Sie entspricht nicht genau dem Waasschen Sonderfall, da die Achsen der Gummifedern nicht alle gleichgerichtet sind, sondern die Druckrichtungen zweier Federn mit der 1-Achse, die der zwei anderen mit der 2-Achse zusammenfallen. Man könnte jetzt natürlich versuchen, durch Bildung mittlerer Steifigkeiten in den zwischen den Koordinatenachsen liegenden Richtungen und nachträglicher Verdrehung des Systems um  $45^\circ$  eine Anpassung an den erwähnten Sonderfall zu erreichen. Aber erstens ist das umständlich und zweitens ist die Bildung solcher Mittelwerte insbesondere bei tensoriellen Größen nicht immer ganz unbedenklich. Es ist aber gar nicht notwendig, zu solchen Hilfsmitteln zu greifen.

<sup>3</sup> 1 N = 1 Newton = 0,102 kp.



Wir haben hier zwei Steifigkeitstensoren vorliegen, und zwar: Für die Punkte  $y_i = (\pm 0.35, 0, -0.325)$

$$c_{ik} = \begin{pmatrix} 585\,000 & 0 & 0 \\ 0 & 99\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 99\,000 \end{pmatrix} \text{ N/m.}$$

Für die Punkte  $y_i = (0, \pm 0.35, -0.325)$

$$c_{ik} = \begin{pmatrix} 99\,000 & 0 & 0 \\ 0 & 585\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 99\,000 \end{pmatrix} \text{ N/m.}$$

Bilden wir den Tensor der Gesamtsteifigkeit aller Federn, so finden wir

$$C_{ik} = \Sigma c_{ik} = \begin{pmatrix} 1\,368\,000 & 0 & 0 \\ 0 & 1\,368\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 396\,000 \end{pmatrix} \text{ N/m.}$$

Von dem Federmoment bleiben nur die beiden Koordinaten  $D_{12}$  und  $D_{21}$ . Es ist

$$\begin{aligned} D_{12} &= \Sigma c_{11} y_3 = C_{11} y_3 = -0.325 \cdot 1\,368\,000 \\ &= -443\,000 \text{ N} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} D_{21} &= -\Sigma c_{22} y_3 = -C_{22} y_3 = 0.325 \cdot 1\,368\,000 \\ &= 443\,000 \text{ N.} \end{aligned}$$

Der Tensor  $E_{ik}$  weist nur in der Hauptdiagonale von Null verschiedene Werte auf, und zwar:

$$\begin{aligned} E_{11} &= \Sigma c_{22} y_3^2 + \Sigma c_{33} y_2^2 \\ &= 1\,368\,000 \cdot 0.325^2 + 2 \cdot 0.35^2 \cdot 99\,000 \\ &= 144\,000 + 24\,200 = 168\,200 \text{ Nm,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{22} &= \Sigma c_{11} y_3^2 + \Sigma c_{33} y_1^2 \\ &= 1\,368\,000 \cdot 0.325^2 + 2 \cdot 0.35 \cdot 99\,000 \\ &= 168\,200 \text{ Nm,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{33} &= \Sigma c_{11} y_2^2 + \Sigma c_{22} y_1^2 \\ &= 2 \cdot 0.35^2 \cdot 99\,000 + 2 \cdot 0.325^2 \cdot 99\,000 \\ &= 48\,400 \text{ Nm.} \end{aligned}$$

Damit sind wir bereits in der Lage, die Eigenfrequenzen zu berechnen. Es ist

$$\begin{aligned} G_{33} &= C_{33} - \omega^2 M = 0, \\ 396\,000 - \omega^2 \cdot 225 &= 0, \end{aligned}$$

$$\omega^2 = 1760,$$

$$\omega = 42 \text{ s}^{-1},$$

$$f = 6.7 \text{ Hz}$$

für die Schiebeschwingung in der Vertikalachse. Ferner ist

$$\begin{aligned} H_{33} &= E_{33} - \omega^2 I_{33} = 0, \\ 48\,400 - \omega^2 \cdot 9 &= 0, \end{aligned}$$

$$\omega^2 = 5380,$$

$$\omega = 73.2 \text{ s}^{-1},$$

$$f = 11.7 \text{ Hz}$$

für die Drehschwingung um die Vertikalachse. Für die weiteren Schwingungen gilt:

$$G_{11} H_{22} - D_{12} D_{12} = 0$$

oder

$$(C_{11} - \omega^2 M) (E_{22} - \omega^2 I_{22}) - D_{12} D_{12} = 0,$$

$$(1368000 - \omega^2 225) (168200 - 5 \omega^2) - 443000^2 = 0.$$

Um von den großen Zahlen wegzukommen, setzen wir

$$z = \omega^2 \cdot 10^{-4}$$

und erhalten

$$(136.8 - 225 z) (16.8 - 5 z) - 44.3^2 = 0,$$

$$1125 z^2 - 4462 z + 330 = 0,$$

$$z^2 - 3.96 z + 0.21 = 0,$$

$$z_{1,2} = 1.98 \pm 1.90,$$

also

$$\omega_1^2 = 38800, \quad \omega_2^2 = 800,$$

$$\omega_1 = 197 \text{ s}^{-1}, \quad \omega_2 = 28.3 \text{ s}^{-1},$$

$$f_1 = 31.4 \text{ Hz}, \quad f_2 = 4.5 \text{ Hz}.$$

Das sind die Frequenzen der beiden Drehschwingungen um Parallele zur 2-Achse. Der Abstand der Drehachsen vom Schwerpunkt folgt aus der Formel (65) mit

$$r = \frac{D_{12}}{G_{11}}$$

$$= \frac{-443000}{1368000 - \omega^2 265},$$

$$r_1 = \frac{-443000}{1368000 - 265 \cdot 38800} = \frac{443000}{8932000}$$

$$= 0.05 \text{ m} = 5 \text{ cm},$$

$$r_2 = \frac{-443000}{1368000 - 265 \cdot 800}$$

$$= -0.384 \text{ m} = -38.4 \text{ cm}.$$

Die Drehachse der schnelleren Schwingung liegt knapp oberhalb des Schwerpunktes, die der langsameren Schwingung in der Nähe der Federebene.

Für die beiden noch zu berechnenden Eigenschwingungen gilt die Gleichung

$$G_{22} H_{11} - D_{21} D_{21} = 0.$$

Wegen  $C_{11} = C_{22}$ ,  $E_{11} = E_{22}$  und  $I_{11} = I_{22}$  ist diese Gleichung identisch mit der für die zuletzt behandelten Eigenschwingungen, und wir erhalten daher auch dieselben Zahlenwerte für die Lösungen. Die Drehachsen dieser Schwingungen sind jedoch parallel zur 1-Achse.

Wollen wir die Ergebnisse der vorliegenden Untersuchung kurz zusammenfassen, dann können wir sagen: Durch die Einführung der Begriffe der Gesamtsteifigkeit ( $C_{ik}$ ), der einfachen ( $D_{ik}$ ) und der doppelten ( $E_{ik}$ ) Federmomente läßt sich die Wirkung der Einzelfedern auf drei Tensoren zurückführen, die in Analogie zur Gesamtmasse, den Massenmomenten und den Trägheitsmomenten stehen. Von diesen insgesamt sechs Größen, von denen alle mit Ausnahme der Gesamtmasse Tensoren zweiter Stufe sind, wird das ganze Problem des federnd gelagerten starren Körpers beherrscht. Ihr Einfluß findet in der Determinante (44) seinen Ausdruck. Die gegenseitige Lage der Hauptachsen der genannten Tensoren bestimmt die mehr oder weniger große Symmetrie der Anordnung. Bei vollkommener Symmetrie (Verschwinden der Federmomente  $D_{ik}$  und der Massenmomente bezüglich des Schwerpunktes und parallele

Lage der Hauptachsen aller Tensoren) treten sechs voneinander vollkommen unabhängige Eigenschwingungen auf, und zwar drei Schiebeschwingungen in den Achsenrichtungen und drei Drehschwingungen um diese Achsen. Bei geringerer Symmetrie nimmt die Zahl der reinen Schiebeschwingungen ab und die Schwingungen werden miteinander gekoppelt. Im allgemeinsten Fall treten sechs Drehschwingungen um verschiedene Achsen auf. Für die praktische Berechnung empfiehlt es sich stets, die Determinante (44) aufzustellen, da sie nicht nur einen Überblick über den Zusammenhang der Schwingungen gibt, sondern auch sofort die Eigenschwingungen zu berechnen erlaubt. Die Elemente der Determinante sind auch maßgebend für den Zusammenhang zwischen der erregenden Kraft oder dem erregenden Moment und den auftretenden Ausschlägen und Drehwinkeln bei Frequenzen außerhalb der Eigenfrequenzen.

(Eingegangen am 3. November 1947.)

## Berichte.

### Das Fließen von Metallen unter verschiedenen Beanspruchungen.<sup>1</sup>

Von A. L. Nadai.<sup>2</sup>

Erster Teil.

Mit 27 Textabbildungen.

Die Erscheinungen, die mit den bleibenden Formänderungen der Metalle im Zusammenhang stehen, haben die Aufmerksamkeit der Forscher während der letzten hundert bis hundertfünfzig Jahre auf sich gezogen und die mathematisch denkenden Beobachter in ihren Bemühungen angeregt, die mechanischen Regeln bzw. Gesetze zu formulieren, nach denen zähe Metalle unter vorgeschriebenen Bedingungen fließen. Während die Elastizitätstheorie meistens sehr kleine Verzerrungen behandelt, muß eine theoretische Behandlung der bleibenden oder plastischen Formänderungen der Metalle auch häufig Verzerrungen von der zeh- bis hundert- und sogar oft mehrfachen Größe derjenigen Verzerrungen, welche noch elastisch möglich sind, berücksichtigen.

Die Mittel der technischen Behandlung endlicher Verzerrungen dieser Größenordnung werden in diesem Vortrag in Erinnerung gebracht und verschiedene neue Arten von Verzerrungen ein-

<sup>1</sup> Übersetzt von C. Torre und H. Majer, Wien, aus Instn. mechan. Engr. London, J. Proc., Appl. Mechan. **157**, 121 (1947).

Das Institute of Mechanical Engineers erhielt das Manuskript dieses Vortrages am 30. Dezember 1946. Der Vortrag wurde als die Second James Clayton Lecture am 18. Februar 1947 in einer Sondersitzung in London gehalten. Vgl. Instn. mechan. Engr., J. Proc. **156**, 83 (1947). — Für die gütige Erlaubnis der Wiederveröffentlichung wird Herrn Dr. H. L. Guy, F. R. S., Sekretär des Instn. mechan. Engr., London, besonderer Dank ausgesprochen.

<sup>2</sup> Verfasser möchte Herrn Prof. Dr. K. Wolf der Technischen Hochschule in Wien, an dessen Lehrkanzel und unter dessen Leitung die Übersetzung durchgeführt wurde, seinen ganz besonderen Dank für seine wohlwollende Befürwortung der Wiederveröffentlichung des Londoner Vortragsberichtes hiermit ausdrücken und für die in liebenswürdigster Weise bereitgestellten vortrefflichen Mittel des Österreichischen Ingenieurarchivs ihm sowie der Schriftleitung allerherzlichst danken. Verfasser ist sich des äußersten Entgegenkommens der Schriftleitung unter den gegenwärtigen Schwierigkeiten der Drucklegung langer technischer Arbeiten voll bewußt und schätzt dieses verdienstvolle Verhalten sowie die in liebenswürdigster Weise angebotene uneigennütige Fürsprache von Herrn Wolf, die diese Übersetzung ermöglichte, mit dankbarstem Gedenken. Er dankt herzlich auch Herrn Torre und Majer für die große Mühe der Übersetzung.

East Pittsburgh, 18. Jan. 1949.

A. L. Nadai.

Consulting Mechanical Engineer, Westinghouse Research Laboratories, East Pittsburgh, Pennsylvania.

Da es von großem Interesse für unsere Leser ist, sich über die neuere Entwicklung auf diesem Gebiete auf dem laufenden zu halten, hat sich die Schriftleitung entschlossen, diese an der I. Lehrkanzel für Allgemeine Mechanik durchgeführte Übersetzung einer Zusammenfassung des betreffenden Stoffes aus berufener Hand im Einverständnis mit Prof. Nadai zu veröffentlichen und somit unserem Leserkreis zugänglich zu machen.

Redaktion.



geführt, welche die Möglichkeit zu bieten scheinen, die Spannungs-Dehnungs-Gleichungen aufzustellen, die für die Entwicklung der Theorie des Fließens der Metalle unter verschiedenen Bedingungen erforderlich sind. Es werden mehrere ideale Stoffe betrachtet, die das Verhalten von Metallen oder anderen Materialien unter verschiedenen Bedingungen wiedergeben können. Für vollkommen plastisches Material ist eine spezielle Lösung für ein ebenes Problem und für plastische rotationssymmetrische Schalen gegeben. Ein Fall des Kriechens von Metallen bei höheren Temperaturen wird erwähnt.

Weiterhin werden Versuche geschildert, die während der Kriegsjahre durchgeführt wurden, und zwar über die Ausbreitung der plastischen Zone in Zugstäben aus weichem Stahl, das Fließen von Kupfer und mittlerem Kohlenstoffstahl unter zusammengesetzter Beanspruchung im Verfestigungsbereich (einschließlich der Beobachtungen der darauffolgenden Brucharten) sowie Versuche über die Wirkung der Formänderungsgeschwindigkeit bei diesen Metallen unter normalen und höheren Temperaturen über einen großen Bereich von Formänderungsgeschwindigkeiten.

## I. Einleitung.

Eine zunehmende Anzahl von Forschern der mechanischen Eigenschaften der metallischen Elemente und ihrer Legierungen glaubt, daß mehrere der wichtigsten mechanischen Eigenschaften der Metalle — und zwar diejenigen, die sie so wertvoll in der technischen Anwendung machen — von solcher Art sind, daß man sie analysieren und in exakten Ausdrücken quantitativ beschreiben kann. Diese Meinung mag manchem Ingenieur, der mit den erheblichen Schwierigkeiten der Konstruktion großer Kraftmaschinen, die mit hohen Geschwindigkeiten, großen Drücken und hohen Temperaturen arbeiten, vertraut ist, zu optimistisch klingen. Eine Feststellung eines Pioniers auf diesem Gebiet soll in dieser Hinsicht angeführt werden:

Im Verkehr mit einsichtigen Fachgenossen bin ich nicht selten der Meinung begegnet, es sei eitel Bemühen, der Festigkeitslehre eine wissenschaftliche Grundlage zu geben. Homogene Körper — so hielt man mir entgegen — kommen in der Natur nicht vor, homogene Spannungszustände ebensowenig. Ein Elementargesetz aus der Erfahrung abzuleiten, ist daher unmöglich. Die vorhandenen Unregelmäßigkeiten sind von der Art, daß sie jede Gesetzmäßigkeit fast vollständig verdecken, und den halbverwischten Spuren solcher Gesetze weiter nachzugehen, das hat kaum ein erhebliches Interesse. Es bleibt nichts anderes übrig, als in jedem wichtigen Falle besondere Versuche anzustellen und sich um die physikalische Deutung der Ergebnisse nicht zu kümmern. Ich habe jedesmal zugeben müssen, daß sich gegen diese Ansichten nicht viel einwenden läßt. Und dennoch wiederholt sich seit mehr als hundert Jahren der Versuch, in die verwirrende Fülle der Erfahrungen Ordnung zu bringen. Wenn es gelingen sollte, Regeln zu finden, denen sich viele Erfahrungen unterordnen, selbstverständlich solche, denen man Vertrauen schenken darf, so würde damit vielleicht kein Elementargesetz, wohl aber ein Hilfsmittel gewonnen sein, um neue Ergebnisse auf ihre Wahrscheinlichkeit zu prüfen.<sup>3</sup>

Vollständigere Versuchsergebnisse, welche man seit der Zeit der Abfassung obiger Zeilen — das ist seit nahezu fünfzig Jahren — erhalten hat, dürften hinreichend beweisen, daß diese ihre Bedeutung nicht verloren haben. Neueste Versuche mögen Ingenieure in der Fortsetzung ihrer Forschung nach einem besseren Verstehen der mechanischen Eigenschaften der Konstruktionsmaterialien ermutigen.

## Bezeichnungen:

$\sigma$  = Normalspannung (Zugspannung positiv) (lb. per sq. in. = 0.070307 kg/cm<sup>2</sup> bzw. in kg/cm<sup>2</sup>).

$\sigma$  = auch mittlere Spannung bei dreiaxsigem Spannungszustand.

$\tau$  = Schubspannung (lb. per sq. in. bzw. in kg/cm<sup>2</sup>).

$\varepsilon$  = bezogene Dehnung.

$\gamma$  = Schiebung.

$\left. \begin{matrix} \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \\ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \end{matrix} \right\} = \text{Hauptnormalspannungen und Hauptdehnungen.}$

<sup>3</sup> O. Mohr: Z. Ver. dtsh. Ing. 1901, 740.

- $E$  = Elastizitätsmodul.  
 $G$  = Schubmodul.  
 $K$  = Kompressionsmodul.  
 $\nu$  = Poissonsche Zahl.  
 $\lambda = (1 + \varepsilon)^2$  = Längenänderung.  
 $\bar{\varepsilon}, \bar{\gamma}$  = natürliche Verzerrungen.  
 $\ln$  = natürlicher Logarithmus.  
 $\varepsilon', \varepsilon''$  = elastische, bleibende Dehnung.  
 $\varepsilon'$  = auch Volumsdilatation.  
 $\gamma', \gamma''$  = elastische, bleibende Schiebung.  
 $p$  = Druck (lb. per sq. in. bzw. kg/cm<sup>2</sup>).  
 $\alpha, \beta, \delta, \dots$  = Winkel.  
 $a_x, a_y, a_z$  = Richtungskosinusse.  
 $\Phi$  = Fließfunktion für Zugbeanspruchung.  
 $\Psi$  = Fließfunktion für Schubbeanspruchung.  
 $\eta$  = Zähigkeitsmaß (Viskositätsmaß).  
 $D$  = Deviator eines Tensors.

## II. Endliche homogene Verzerrungen.

### 1. „Längenänderung“ $\lambda$ , Schiebung $\gamma$ .

In der Mechanik der kontinuierlich ausgedehnten Medien ist der Zustand der homogenen Verzerrung im verformten Material durch die Annahme definiert, daß die Koordinaten  $x', y', z'$  eines Punktes  $P'$  im verzerrten Körper lineare homogene Funktionen der Koordinaten  $x, y, z$  desselben Materialpunktes  $P$  im unverzerrten Zustand des Körpers sind

$$\left. \begin{aligned} x' &= (1 + c_{xx})x + c_{xy}y + c_{xz}z, \\ y' &= c_{yx}x + (1 + c_{yy})y + c_{yz}z, \\ z' &= c_{zx}x + c_{zy}y + (1 + c_{zz})z. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Dies ist der Aussage in der Vektoranalysis gleichwertig, daß der verzerrte Vektor  $OP' = \mathbf{r}'$  eine lineare Funktion des unverzerrten Vektors  $OP = \mathbf{r}$  ist oder daß nach W. Gibbs<sup>4</sup>  $\mathbf{r}'$  durch eine lineare Vektorfunktion ausgedrückt wird

$$\mathbf{r}' = r_o (\mathbf{i} \mathbf{a} + \mathbf{j} \mathbf{b} + \mathbf{k} \mathbf{c}), \quad (2)$$

wo  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  drei gegebene, nicht komplanare Vektoren im Raume,  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  die Einsektoren in der Richtung der Koordinatenachsen  $x, y, z$  sind und  $o$  angibt, daß das skalare Produkt zu nehmen ist.

Obwohl irgendeine Kombination von drei einfachen Ausdrücken aus Gl. (1), wie etwa  $x' = (1 + c_{xx})x, y' = 0, z' = 0 \dots$  usw., einfache Verzerrungszustände darstellt, z. B. einachsigen Zug oder einfachen Schub usw., so sind die neun Konstanten  $c_{xx}, c_{xy} \dots$  nicht besonders für die Anwendung geeignet,<sup>5</sup> weil die bezogenen Dehnungen oder die Schiebungen in gegebenen Richtungen oder in gegebenen Ebenen des Körpers sich durch  $c_{xx}, c_{xy} \dots$  in nicht genügend einfacher Weise ausdrücken lassen. Dies gilt besonders dann, wenn mit der Verzerrung eine Drehung der Hauptdehnungsachsen verbunden ist.

<sup>4</sup> J. W. Gibbs und E. B. Wilson: Vector Analysis, S. 260. Yale University Press. 1931.

<sup>5</sup> Die lineare Raumtransformation Gl. (1) oder ihre gleichwertige lineare Vektorfunktion Gl. (2) dient, wie es in den Lehrbüchern der Mechanik zu finden ist, dazu, um zu zeigen, daß eine im unverzerrten Körper gedachte Einheitskugel durch eine homogene Verzerrung in ein Ellipsoid im verzerrten Körper übergeht und daß es im unverzerrten Körper drei aufeinander senkrechte Richtungen gibt, welchen nach der Verzerrung wieder drei aufeinander senkrechte Richtungen entsprechen. Dies sind die Hauptdehnungsrichtungen.

In der technischen Anwendung hat man es meistens mit festen Stoffen zu tun, deren Dichte bei der Verzerrung wenig geändert wird. Es genügt deshalb, nur unzusammendrückbares Material zu betrachten.<sup>6</sup>

Bei einem homogenen Verzerrungszustand wird ein Strahlenbüschel, das im Ursprung  $O$  des Koordinatensystems  $x, y, z$  entspringt, gedreht und gestreckt. Wird angenommen, daß die Hauptdehnungsrichtungen mit den  $x$ -,  $y$ -,  $z$ -Achsen nach der

Verzerrung zusammenfallen oder daß der Verzerrungszustand drehungsfrei ist, dann gilt

$$x' = (1 + \varepsilon_1) x, \quad y' = (1 + \varepsilon_2) y, \quad z' = (1 + \varepsilon_3) z, \quad (3)$$

wo  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  die üblichen Hauptdehnungen darstellen.

Statt der üblichen Dehnung  $\varepsilon$ , die durch  $\varepsilon = (OP' - OP)/OP = (r' - r)/r$  (Abb. 1) definiert ist, führen wir eine geeignetere Verzerrungsveränderliche  $\lambda$  ein, die durch

$$\lambda = (1 + \varepsilon)^2 = r'^2/r^2 \quad (4)$$

gegeben ist und die „Längenänderung“ in der Richtung  $OP'$  genannt werden soll. An Stelle der Hauptdehnungen  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  werden die entsprechenden Hauptlängenänderungen  $\lambda_1 = (1 + \varepsilon_1)^2, \lambda_2, \lambda_3$  verwendet.<sup>7</sup> Sind  $a_x, a_y, a_z$  die Richtungskosinusse von  $OP$  im unverzerrten und  $a_x', a_y', a_z'$  die von  $OP'$  im verzerrten Zustand des Körpers, dann erhält man

$$\left. \begin{aligned} x' &= \sqrt{\lambda_1} x = \sqrt{\lambda_1} a_x r, \\ y' &= \sqrt{\lambda_2} y = \sqrt{\lambda_2} a_y r, \\ z' &= \sqrt{\lambda_3} z = \sqrt{\lambda_3} a_z r \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

und die Längenänderung  $\lambda$  in der Richtung  $OP'$

$$\lambda = r'^2/r^2 = (x'^2 + y'^2 + z'^2)/r^2 = \lambda_1 a_x^2 + \lambda_2 a_y^2 + \lambda_3 a_z^2, \quad (6)$$

wo  $\lambda$  eine positive Größe ist.

Die im unverzerrten Körper gedachte Einheitskugel  $r = 1$

$$a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = 1 \quad (7)$$

wird in das Verzerrungsellipsoid

$$\frac{x'^2}{\lambda_1} + \frac{y'^2}{\lambda_2} + \frac{z'^2}{\lambda_3} = 1 \quad (8)$$

verformt, dessen Radiusvektoren den Betrag  $\sqrt{\lambda}$  haben. Die Richtungskosinusse  $a_x', a_y', a_z'$  dieser Radiusvektoren betragen

$$a_x' = a_x \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda}}, \quad a_y' = a_y \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda}}, \quad a_z' = a_z \sqrt{\frac{\lambda_3}{\lambda}}. \quad (9)$$

<sup>6</sup> Bei zusammendrückbaren Materialien bedeutet dies die Berücksichtigung nur dieses Teiles der Verzerrung, den man erhält, wenn man von der endlichen Verzerrung mit der Volumsdilatation  $\varepsilon$  eine gleichförmige Volumsverzerrung von der Größe  $\sqrt[3]{1 + \varepsilon}$  abzieht.

<sup>7</sup> In seinen Untersuchungen über endliche elastische Verzerrungen bei Gummi führt Mooney: The Theory of Large Elastic Deformation, J. appl. Physics 11, 582 (1940), statt der üblichen Dehnung eine Größe ein, die er durch  $\lambda = 1 + \varepsilon$  definiert und „Streckung“ („stretch“) nennt. In seiner Arbeit führt Mooney ferner eine neue Elastizitätskonstante ein, die in den früheren Theorien nicht zu finden ist und die er braucht, um die Verzerrungsenergie in invarianter Form auszudrücken. Soweit der Verfasser es überblickt, deckt sich das Elastizitätsgesetz für endliche Formänderungen von Mooney nicht mit den hier beschriebenen Vorschlägen, welche das Ziel haben, die Gültigkeit der elastisch isotropen Spannungs-Dehnungs-Gleichungen, wie sie in der klassischen Elastizitätstheorie für unendlich kleine Verzerrungen angenommen werden, zu bewahren. Die Einführung der Verzerrungen  $\lambda$  und  $\gamma$ , schien dem Verfasser einen natürlicheren Weg für eine mögliche Erweiterung der Spannungs-Dehnungs-Beziehungen vom Bereich der unendlich kleinen auf den der endlichen Verzerrungen zu bieten.



Die Konstanz des Volumens nach der Verzerrung erfordert, daß

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1. \quad (10)$$

Nun brauchen wir einen Ausdruck für die endliche Schiebung. Nehmen wir an, daß eine Ebene  $E$  senkrecht zur Richtung  $OP$  durch eine Tangentialebene an die Einheitskugel im Punkt  $P$  gegeben sei. Die Ebene  $E$  geht nach der Verzerrung in eine Ebene  $E'$  tangential an das Verzerrungsellipsoid im Punkt  $P'$  über. Ist  $\psi$  der Winkel zwischen dem Strahl  $OP'$  (Abb. 2) und der Normalen  $OQ'$  auf die Ebene  $E'$  im verzerrten Körper, so ist die übliche Schiebung  $\gamma$  in Übereinstimmung mit der gewohnten Festlegung als Tangens dieses Winkels  $\psi$  definiert

$$\gamma = \operatorname{tg} \psi. \quad (11)$$

Die Tangentialebene  $E$  an die Einheitskugel im Punkt  $P$  ( $a_x, a_y, a_z$ ), deren Gleichung lautet

$$a_x \xi + a_y \eta + a_z \zeta - 1 = 0,$$

wird eine Tangentialebene  $E'$  an das Verzerrungsellipsoid

$$a_x'' \xi' + a_y'' \eta' + a_z'' \zeta' - l = 0,$$

wo  $a_x'', a_y'', a_z''$  die Richtungskosinusse der Normalen auf die Ebene  $E'$  und  $l$  ihr Abstand vom Ursprung  $O$  ist. Die Abschnitte  $x_i', y_i', z_i'$  der Ebene  $E'$  auf den Koordinatenachsen müssen nach Gl. (5) betragen

$$\begin{aligned} x_i' &= \sqrt{\lambda_1} x_i = \sqrt{\lambda_1} / a_x, \\ y_i' &= \sqrt{\lambda_2} y_i = \sqrt{\lambda_2} / a_y, \\ z_i' &= \sqrt{\lambda_3} z_i = \sqrt{\lambda_3} / a_z, \end{aligned}$$

wo  $x_i, y_i, z_i$  die Abschnitte der Ebene  $E$  sind. Da

$$a_x'' = \frac{l}{x_i'} = \frac{l a_x}{\sqrt{\lambda_1}}, \quad a_y'' = \frac{l a_y}{\sqrt{\lambda_2}}, \quad a_z'' = \frac{l a_z}{\sqrt{\lambda_3}}; \quad l^2 = \frac{1}{\frac{a_x^2}{\lambda_1} + \frac{a_y^2}{\lambda_2} + \frac{a_z^2}{\lambda_3}}, \quad (12)$$

ergeben sich die Richtungskosinusse  $a_x'', a_y'', a_z''$  der Normalen zur Ebene  $E'$  zu

$$a_x''^2 = \frac{\frac{a_x^2}{\lambda_1}}{\frac{a_x^2}{\lambda_1} + \frac{a_y^2}{\lambda_2} + \frac{a_z^2}{\lambda_3}}, \quad a_y''^2 = \frac{\frac{a_y^2}{\lambda_2}}{\frac{a_x^2}{\lambda_1} + \frac{a_y^2}{\lambda_2} + \frac{a_z^2}{\lambda_3}}, \quad a_z''^2 = \frac{\frac{a_z^2}{\lambda_3}}{\frac{a_x^2}{\lambda_1} + \frac{a_y^2}{\lambda_2} + \frac{a_z^2}{\lambda_3}}. \quad (13)$$

Mit  $\cos \psi = l/r'$ ,  $r' = \sqrt{l}$  und dem Ausdruck für  $l$  erhalten wir für die Schiebung  $\gamma$  die Gleichung

$$\gamma^2 = \operatorname{tg}^2 \psi = \frac{1}{\cos^2 \psi} - 1 = \frac{r'^2}{l^2} - 1 = \frac{\lambda}{l^2} - 1$$

oder

$$\gamma^2 = (\lambda_1 a_x^2 + \lambda_2 a_y^2 + \lambda_3 a_z^2) \left( \frac{a_x^2}{\lambda_1} + \frac{a_y^2}{\lambda_2} + \frac{a_z^2}{\lambda_3} \right) - 1. \quad (14)$$

Dies kann auch folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$\gamma^2 = \lambda_3 (\lambda_1 - \lambda_2)^2 a_x^2 a_y^2 + \lambda_1 (\lambda_2 - \lambda_3)^2 a_y^2 a_z^2 + \lambda_2 (\lambda_3 - \lambda_1)^2 a_z^2 a_x^2. \quad (15)$$

Gl. (15) und (16) für die Längenänderung

$$\lambda = \lambda_1 a_x^2 + \lambda_2 a_y^2 + \lambda_3 a_z^2 \quad (16)$$

drücken die Schiebung  $\gamma$  und die Längenänderung  $\lambda$  als Funktion der Richtungs-

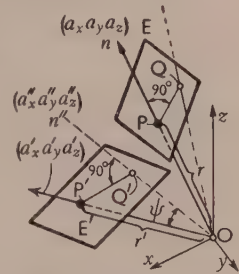


Abb. 2. Die Ebenen  $E$  und  $E'$ .

kosinusse  $a_x, a_y, a_z$  eines im unverzerrten Körper angenommenen Strahlenbüschels aus. Zu diesen zwei Gleichungen seien noch die beiden Bedingungen

$$a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = 1 \quad \text{und} \quad \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1 \quad (17)$$

hinzugefügt.

## 2. Graphische Darstellung.

Wir vermerken, daß ein Zustand endlicher Verzerrungen in einem ebenen Bild der Mohrschen Darstellung des allgemeinen Spannungszustandes dargestellt werden kann.<sup>8</sup>

Wenn ein Körper sich in einem homogenen Spannungszustand befindet, so können bekanntlich die Normalspannung  $\sigma$  und die Schubspannung  $\tau$  in einem ebenen Schnitt normal zu einer Geraden mit den Richtungskosinussen  $a_x, a_y, a_z$  bezüglich der Achsen  $x, y, z$  (diese Achsen wollen wir hier mit den Hauptspannungsrichtungen zusammenfallen lassen) ausgedrückt werden durch

$$\sigma = \sigma_1 a_x^2 + \sigma_2 a_y^2 + \sigma_3 a_z^2, \quad (18)$$

$$\tau^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 a_x^2 a_y^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 a_y^2 a_z^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 a_z^2 a_x^2. \quad (19)$$

Nach Mohr wird ein Punkt  $Q$  mit den Koordinaten  $\sigma$

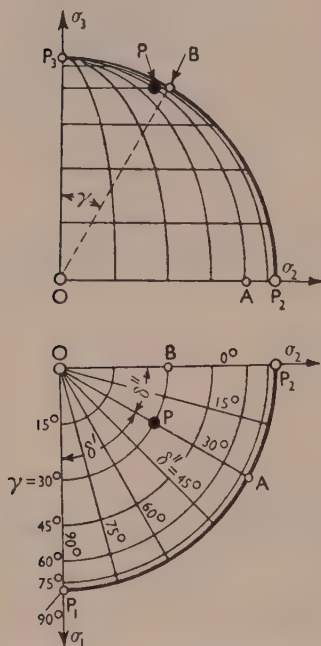


Abb. 3. Orientierungskugel.

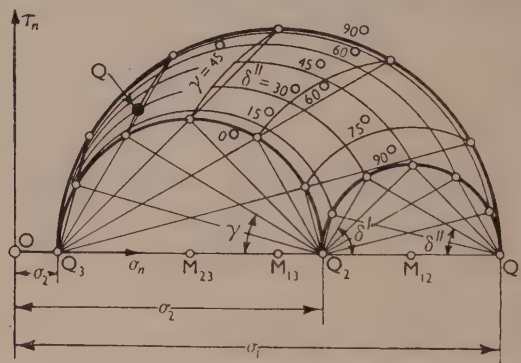


Abb. 4. Mohrsche Spannungskreise.

und  $\tau$  eines rechtwinkligen Systems in einer  $\sigma, \tau$ -Ebene festgelegt. Die Gesamtheit verschiedener Lagen von  $Q$  — entsprechend gegebenen Lagen eines Punktes  $P(a_x, a_y, a_z)$  auf der Oberfläche der Einheitskugel —

$$a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = 1 \quad (20)$$

ergibt das bekannte Bild der Mohrschen Kreise in der „Spannungsebene“  $\sigma, \tau$ , welche den ersten Oktanten der Einheitskugel Gl. (20) darstellen (siehe Abb. 3 und 4).

Wir wählen acht ebene Schnitte, deren Ebenen die Einheitskugel in den Punkten tangieren, in denen die vier Raumdiagonalen mit  $a_x = a_y = a_z = \pm 1/\sqrt{3}$  die Kugel schneiden. Diese acht Ebenen umschreiben der Einheitskugel einen regelmäßigen Oktaeder (Abb. 5, Tafel 1). Die oktaedrale Normalspannung ist gleich der mittleren Spannung

$$\sigma_{\text{okt}} = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3 \quad (21)$$

<sup>8</sup> O. Mohr: Z. Ver. deutsch. Ing. 1900, 1572; Abhandlungen, 2. Aufl. S. 192. Berlin: W. Ernst u. Sohn. 1914.

und die oktaedrale Schubspannung ergibt sich zu

$$\tau_{\text{okt}} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}.^9 \quad (22)$$

Bevor wir Abb. 4 besprechen, rechnen wir aus den drei Gl. (18), (19), (20) die Richtungskosinusse aus:

$$a_x^2 = \frac{(\sigma_2 - \sigma)(\sigma_3 - \sigma) + \tau^2}{(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_1)}, \quad a_y^2 = \frac{(\sigma_3 - \sigma)(\sigma_1 - \sigma) + \tau^2}{(\sigma_3 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_2)},$$

$$a_z^2 = \frac{(\sigma_1 - \sigma)(\sigma_2 - \sigma) + \tau^2}{(\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_3)}. \quad (23)$$

Eine Konstruktion zur Ermittlung des Wertes  $\tau_{\text{okt}}$  ist in Abb. 6 und 7 gezeigt.

In einer kürzlich erschienenen Arbeit dehnt Swift<sup>10</sup> die Gültigkeit dieses Diagramms auch auf die graphische Darstellung eines Zustandes unendlich kleiner Verzerrungen aus. In dieser Untersuchung sind auch interessante Vorschläge für die Darstellung der Zustände endlicher Verzerrungen gemacht und geometrische Konstruktionen beschrieben, die sich auf kleine, der Bedingung Gl. (17) genügende plastische Verzerrungen und ihre Anwendung auf den

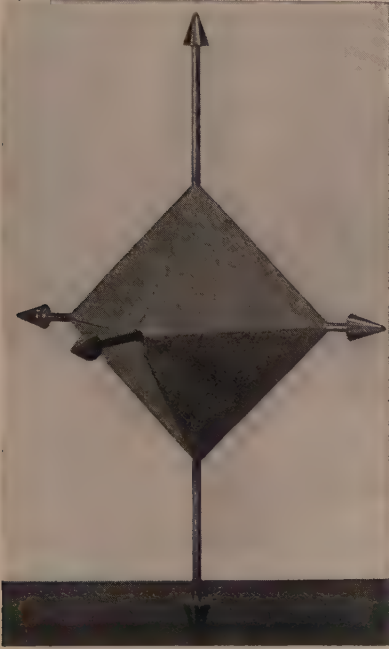


Abb. 5. Modell des Oktaeders: Tangentialebenen auf die Einheitskugel.

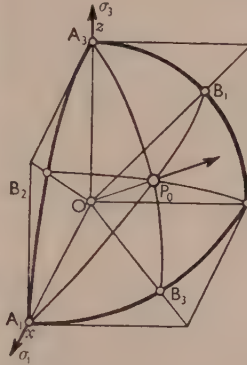


Abb. 6. Stellung der Oktaederfläche.

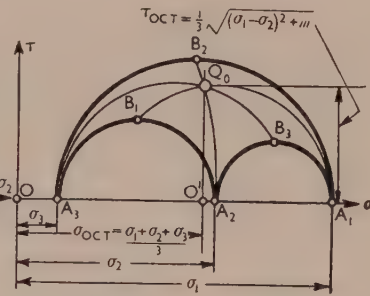


Abb. 7. Die Spannungen  $\sigma_{\text{okt}}$  und  $\tau_{\text{okt}}$ .

Verfestigungsbereich der Metalle beziehen. Für große Verzerrungen schlägt Swift ein Verzerrungsmaß vor, das mit der oben eingeführten Veränderlichen  $\lambda$  identisch ist.

Daß sich die Geometrien der Spannungen und unendlich kleinen Verzerrungen miteinander decken, wird durch die Feststellung ausgedrückt, daß man dieselben Ergebnisse bezüglich z. B. der Hauptwerte, deren Richtungen usw. erhält, wenn man die Komponenten des Spannungstensors  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$  durch die Komponenten  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \frac{\gamma_{xy}}{2}, \frac{\gamma_{yz}}{2}, \frac{\gamma_{zx}}{2}$  eines Tensors unendlich kleiner Verzerrungen ersetzt.<sup>11</sup>

<sup>9</sup> Die Richtungen, in welchen  $\tau_{\text{okt}}$  in den acht Oktaederflächen wirkt, findet man einfach durch die Konstruktion der in der Oktaederfläche des ersten Oktanten ( $a_x, a_y, a_z > 0$ ) — einem gleichseitigen Dreieck — wirkenden Resultierenden der drei in Abb. 8 dargestellten Vektoren von den Größen  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  mal  $1/\sqrt{2}$ .

<sup>10</sup> H. W. Swift: Plastic Strain in Isotropic Strain Hardening Material. Engineering 162, 381 (1946).

<sup>11</sup> Dies kann leicht auch aus Gl. (15) und (16) überprüft werden, wenn man  $\gamma$  und  $\lambda$  unter Vernachlässigung der Ausdrücke zweiter Ordnung, nämlich  $\varepsilon^2$  in  $\lambda = (1 + \varepsilon)^2 = (1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2)$  ausdrückt.



So sind z. B. die oktaedrale Dehnung  $\varepsilon_0$  und Schiebung  $\gamma_0$  für den Zustand unendlich kleiner Verzerrungen ausgedrückt durch

$$\varepsilon_0 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)/3, \quad \gamma_0 = \frac{2}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}. \quad (24)$$

Betrachten wir nun einen Zustand endlich großer Verzerrung, so wird ähnlich der Konstruktion der Abb. 4 ein Punkt  $Q$  mit der Abszisse der Längenänderung  $\lambda$  und der Ordinate der üblichen Schiebung  $\gamma$  in eine  $\lambda, \gamma$ -Ebene gelegt, wobei seine Lage einem

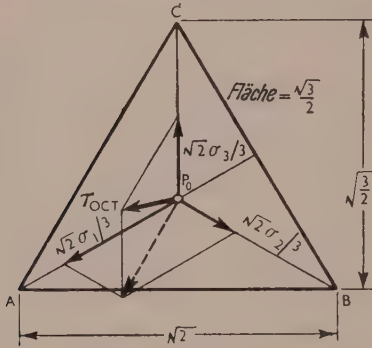


Abb. 8. Oktaedrale Schubspannung  $\tau_{\text{okt}}$ .

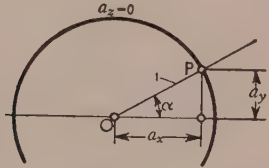


Abb. 9. Projektion der Einheitskugel auf die Ebene  $a_z = 0$ .

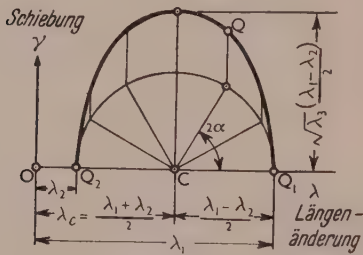


Abb. 10. Hauptlängenänderungsellipse ( $a_z = 0$ ).

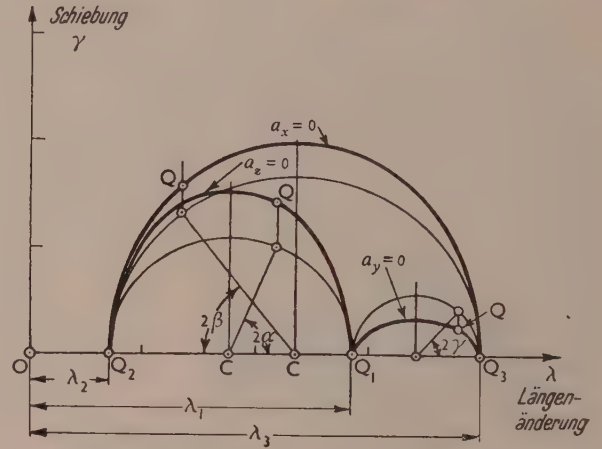


Abb. 11. Hauptlängenänderungsellipsen.

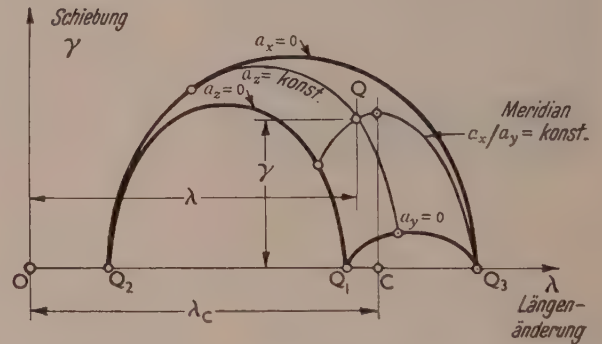


Abb. 12. Graphische Darstellung der Längenänderungen  $\lambda$  und der Schiebung  $\gamma$ .

Punkt  $P$  auf der Einheitskugel oder einer gegebenen Richtung  $a_x, a_y, a_z$  entspricht. So wird wieder ein Bild eines Oktanten der Einheitskugel in der  $\lambda, \gamma$ -Ebene erhalten.

Löst man Gl. (15), (16) und (17) nach diesen Richtungskosinussen auf, so erhalten wir für einen Zustand endlicher homogener Verzerrung

$$\left. \begin{aligned} a_x^2 &= \frac{\lambda_1 (\lambda_2 - \lambda) (\lambda_3 - \lambda) + \gamma^2}{\lambda (\lambda_2 - \lambda_1) (\lambda_3 - \lambda_1)}, & a_y^2 &= \frac{\lambda_2 (\lambda_3 - \lambda) (\lambda_1 - \lambda) + \gamma^2}{\lambda (\lambda_3 - \lambda_2) (\lambda_1 - \lambda_2)}, \\ a_z^2 &= \frac{\lambda_3 (\lambda_1 - \lambda) (\lambda_2 - \lambda) + \gamma^2}{\lambda (\lambda_1 - \lambda_3) (\lambda_2 - \lambda_3)}. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Es gibt drei Paare von Polen, nämlich  $P_1, P_2, P_3$  auf der Kugel Gl. (17), durch die drei Hauptkreise oder Äquatoren  $a_x = 0, a_y = 0, a_z = 0$  gehen. Die Bild-

punkte  $Q_1, Q_2, Q_3$ , die den Punkten  $P_1, P_2, P_3$  entsprechen, liegen auf der  $\lambda$ -Achse in den Entfernungen  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  vom Ursprung. Betrachten wir z. B. auf der Kugel den Äquator  $a_z = 0$ . Aus der letzten Gl. (25) folgt mit  $a_z = 0, \lambda_3 (\lambda_1 - \lambda) (\lambda_2 - \lambda) + \gamma^2 = 0$ . Dies ist die Gleichung einer Ellipse in den Veränderlichen  $\lambda, \gamma$ . Es gibt dreisolche Hauptlängenänderungs-Schiebungs-Ellipsen. Ihre Halbachsen und ihre Mittelpunktsabstände  $\lambda_c$  sind in Tabelle 1 angegeben.

Tabelle 1. Hauptlängenänderungs-Schiebungs-Ellipsen.

Hauptkreis	Mittelpunktsabstand $\lambda_c$	Halbachsen der Ellipse	
		A =	B =
$a_z = 0$	$(\lambda_1 + \lambda_2)/2$	$(\lambda_1 - \lambda_2)/2$	$\sqrt{\lambda_3} (\lambda_1 - \lambda_2)/2$
$a_x = 0$	$(\lambda_2 + \lambda_3)/2$	$(\lambda_2 - \lambda_3)/2$	$\sqrt{\lambda_1} (\lambda_2 - \lambda_3)/2$
$a_y = 0$	$(\lambda_3 + \lambda_1)/2$	$(\lambda_3 - \lambda_1)/2$	$\sqrt{\lambda_2} (\lambda_3 - \lambda_1)/2$

Die drei lotrechten Halbachsen stellen die Größtwerte der endlichen Schiebungen  $\gamma$  oder die drei Hauptschiebungen dar, die in den Punkten jedes der drei Hauptkreise auftreten, in denen entweder  $\alpha$  oder  $\beta$  oder  $\gamma = 45^\circ$  beträgt. Abb. 9 zeigt eine Projektion der Einheitskugel auf die Ebene  $a_z = 0$  und Abb. 10 die Hauptlängenänderungs-Schiebungs-Ellipse. Die Lage eines Punktes  $Q$  entsprechend einem Punkt  $P$  auf einem der Hauptkreise (z. B.  $a_z = 0$ ) wird durch die bekannte Ellipsenkonstruktion mit einem Winkel  $2\lambda$ , wie Abb. 10 zeigt, ermittelt. Diese drei Hauptlängenänderungs-Ellipsen sind in einem Beispiel in Abb. 11 für den Fall gezeigt, daß die Hauptlängenänderungen  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  der Bedingung der Unzusammendrückbarkeit  $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$  genügen.

Es kann in ähnlicher Weise gezeigt werden, daß man für Parallelkreise wie  $a_x = \text{konst.}$  und für Meridiankreise  $a_y/a_z = \text{konst.}$ , die man auf der Einheitskugel Gl. (17) ziehen kann, in der  $\lambda, \gamma$ -Ebene Ellipsen erhält. Eine ihrer Achsen fällt immer mit der  $\lambda$ -Achse zusammen und die anderen Achsen sind parallel zur  $\gamma$ -Achse. Zwei solche Ellipsen, die durch Punkt  $Q$  gehen, sind in Abb. 12 gezeichnet. Die Abbildungen der Parallelkreise der Kugel ergeben nichtkonzentrische Ellipsen.

### 3. Berechnung der Verzerrungskomponenten aus den jeweiligen Richtungen im verzerrten Körper.

In den vorhergehenden Gleichungen werden die Längenänderungen  $\lambda$  und die Schiebungen  $\gamma$  als Funktion der Richtungskosinusse  $a_x, a_y, a_z$  einer im unverzerrten Körper gedachten Geraden ausgedrückt. Es ist genau so interessant wie wichtig, eine Darstellung der Werte  $\lambda$  und  $\gamma$  für gegebene Richtungen im verzerrten Körper zu besitzen. Es sei zur Abkürzung gesetzt

$$a = a_x^2, \quad b = a_y^2, \quad c = a_z^2$$

und ähnlich

$$a' = a_x'^2 \dots \quad \text{und} \quad a'' = a_x''^2 \dots$$

(diese Größen können „Richtungen“ genannt werden), dann gilt für jedes dieser Tripel

$$a + b + c = 1.$$

Nach Gl. (9) ist dann

$$a = \lambda a' / \lambda_1, \quad b = \lambda b' / \lambda_2, \quad c = \lambda c' / \lambda_3, \quad (26)$$

woraus folgt

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{a'}{\lambda_1} + \frac{b'}{\lambda_2} + \frac{c'}{\lambda_3} \quad (27)$$

und daher

$$a = \frac{\frac{a'}{\lambda_1}}{\frac{a'}{\lambda_1} + \frac{b'}{\lambda_2} + \frac{c'}{\lambda_3}}, \quad b = \frac{\frac{b'}{\lambda_2}}{\frac{a'}{\lambda_1} + \frac{b'}{\lambda_2} + \frac{c'}{\lambda_3}}, \quad c = \frac{\frac{c'}{\lambda_3}}{\frac{a'}{\lambda_1} + \frac{b'}{\lambda_2} + \frac{c'}{\lambda_3}}. \quad (28)$$

Führen wir diese Ausdrücke für die Richtungen im unverzerrten Körper in Gl. (15) ein, dann ergibt sich für die Schiebung  $\gamma_{\Delta}$  die Gleichung

$$\frac{\gamma^2}{\lambda^2} = \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)^2 a' b' + \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_3}\right)^2 b' c' + \left(\frac{1}{\lambda_3} - \frac{1}{\lambda_1}\right)^2 c' a'. \quad (29)$$

Gl. (27) und (29) drücken die Längenänderung  $\lambda$  in der Richtung  $(a', b', c')$  im verzerrten Körper und die Schiebung  $\gamma$  in der Ebene  $E'$  aus.

Aus Gl. (27) und (29) kann eine interessante Schlußfolgerung gezogen werden. Definieren wir zwei neue Verzerrungsveränderliche  $\lambda'$  und  $\gamma'$  durch

$$\lambda' = \frac{1}{\lambda}, \quad \gamma' = \frac{\gamma}{\lambda}, \quad (30)$$

dann wird aus Gl. (27) und (29)

$$\lambda' = \lambda_1' a' + \lambda_2' b' + \lambda_3' c' \quad (31)$$

und

$$\gamma'^2 = (\lambda_1' - \lambda_2')^2 a' b' + (\lambda_2' - \lambda_3')^2 b' c' + (\lambda_3' - \lambda_1')^2 c' a'. \quad (32)$$

Dazu kommt noch

$$a' + b' + c' = 1. \quad (33)$$

Ein Vergleich dieser letzten drei Gleichungen mit den entsprechenden Gl. (18) und (19) für einen Spannungszustand zeigt, daß beide Gruppen jetzt formal gleich sind. Wenn daher in diesen letzteren Gleichungen die Spannungskomponenten  $\sigma, \tau, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , durch die Verzerrungskomponenten  $\lambda', \gamma', \lambda_1', \lambda_2', \lambda_3'$  ersetzt werden, so erhält man Gl. (31) und (32).

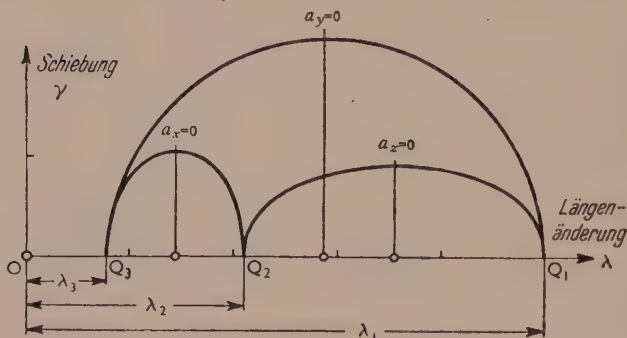


Abb. 13. Längenänderungs-Schiebungs-Diagramm.

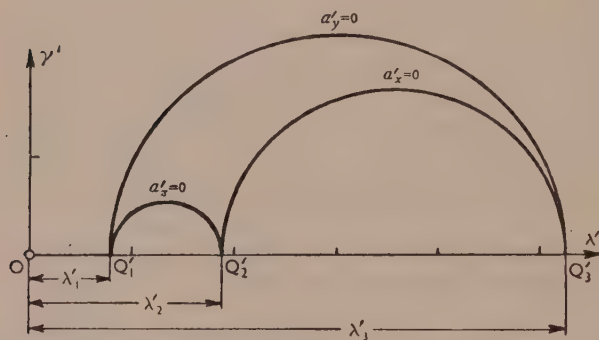


Abb. 14. Diagramm der reziproken Verzerrungen.

Folglich kann ein Zustand endlicher Verzerrungen  $(\lambda_1', \lambda_2', \lambda_3')$  durch eine Schar von Kreistripeln in einer  $\lambda', \gamma'$ -Ebene so wie ein Spannungszustand durch die Mohrschen Kreise in einer  $\sigma, \tau$ -Ebene dargestellt werden. Die Substitutionsgleichungen (30) transformieren die im Abschnitt 2 beschriebene Abbildung für die Längenänderungs-Schiebungs-Ellipsen in eine Abbildung, die nur Kreise enthält. Während die Abszissen in der  $\lambda', \gamma'$ -Ebene die Kehrwerte der Längenänderungen  $\lambda$  sind, werden die Veränderlichen  $\gamma'$  durch die Tangenten der Winkel der Strahlen  $OQ$  vom Ursprung  $O$  zum Punkt  $Q$  in der  $\lambda, \gamma$ -Ebene mit der  $\lambda$ -Achse gegeben (Abb. 12).

Ein Beispiel ist in Abb. 13 und 14 gezeigt. In der ersteren sind die Hauptlängenänderungs-Schiebungs-Ellipsen in der  $\lambda, \gamma$ -Ebene dargestellt. Für die Hauptlängenänderungen sind die Werte  $\lambda_1 = 5/2$ ,  $\lambda_2 = 20/19 = 1.0526$  und  $\lambda_3 = 19/50 = 0.3800$  angenommen (sie genügen der Bedingung der Unzusammendrückbarkeit  $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$ ). Das entsprechende Bild mit den reziproken Längenänderungen  $\lambda_1' = 2/5 = 0.400$ ,  $\lambda_2' = 19/20 = 0.950$  und  $\lambda_3' = 50/19 = 2.632$  zeigt Abb. 14, in der  $\lambda' = 1/\lambda$  und  $\gamma' = \gamma/\lambda$  die Koordinaten sind. Abb. 14 enthält nur Kreise. Die Abbildung der Meridian- und Parallelkreise einer im verzerrten Körper gedachten Einheitskugel würde in der  $\lambda', \gamma'$ -Ebene der Abb. 14 wieder Kreise ergeben.



Gl. (27) drückt die Längenänderung  $\lambda$  in der Richtung  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$  als Funktion dieser letzteren Größen aus. Die Schiebung  $\gamma$  [wie sie z. B. durch die Gl. (14) oder (15) ausgedrückt wird] erhält man indessen für eine bestimmte Ebene  $E'$  — im verzerrten Körper —, die eine schiefe Lage gegen die Richtung  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$  im verzerrten Körper einnimmt. Der Ausdruck für die Schiebung  $\gamma$  in den zur gegebenen Richtung  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$  senkrechten Ebenen im verzerrten Körper wäre vorzuziehen.

Eine einfache Überlegung soll uns diesen Ausdruck für eine Schiebung liefern. Wir wollen einen Ausdruck für  $\gamma$  als Funktion der Richtungen  $a''$ ,  $b''$ ,  $c''$  der Normalen zur Ebene  $E'$  erhalten. Für  $a''$ ,  $b''$ ,  $c''$  finden wir die Werte [nach Gl. (13)]

$$\begin{aligned} a'' &= \frac{a}{\lambda_1} \left( \frac{a}{\lambda_1} + \frac{b}{\lambda_2} + \frac{c}{\lambda_3} \right), & b'' &= \frac{b}{\lambda_2} \left( \frac{a}{\lambda_1} + \frac{b}{\lambda_2} + \frac{c}{\lambda_3} \right), \\ c'' &= \frac{c}{\lambda_3} \left( \frac{a}{\lambda_1} + \frac{b}{\lambda_2} + \frac{c}{\lambda_3} \right). \end{aligned} \quad (34)$$

Wir müssen diese Gleichungen, die voneinander nicht unabhängig sondern durch die Bedingung  $a + b + c = 1$  verknüpft sind, nach  $a$ ,  $b$ ,  $c$  auflösen. Wir multiplizieren  $a''$  mit  $\lambda_1$ ,  $b''$  mit  $\lambda_2$  und  $c''$  mit  $\lambda_3$  und addieren

$$\lambda_1 a'' + \lambda_2 b'' + \lambda_3 c'' = \frac{1}{\frac{a}{\lambda_1} + \frac{b}{\lambda_2} + \frac{c}{\lambda_3}}. \quad (35)$$

Aus Gl. (34) erhalten wir dann

$$a = \frac{\lambda_1 a''}{\lambda_1 a'' + \lambda_2 b'' + \lambda_3 c''}, \quad b = \frac{\lambda_2 b''}{\lambda_1 a'' + \lambda_2 b'' + \lambda_3 c''}, \quad c = \frac{\lambda_3 c''}{\lambda_1 a'' + \lambda_2 b'' + \lambda_3 c''} \quad (36)$$

und nach Einführung dieser Werte in Gl. (14)

$$\gamma''^2 = \frac{\lambda_1^2 a''^2 + \lambda_2^2 b''^2 + \lambda_3^2 c''^2}{(\lambda_1 a'' + \lambda_2 b'' + \lambda_3 c'')^2} - 1. \quad (37)$$

Benützt man Gl. (15) statt Gl. (14), dann erhält man folgenden gleichwertigen Ausdruck für  $\gamma''$

$$\gamma''^2 = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 a'' b'' + (\lambda_2 - \lambda_3)^2 b'' c'' + (\lambda_3 - \lambda_1)^2 c'' a''}{(\lambda_1 a'' + \lambda_2 b'' + \lambda_3 c'')^2}. \quad (38)$$

Nun können wir  $a''$ ,  $b''$ ,  $c''$  als eine beliebige Richtung im verzerrten Körper betrachten. Gl. (37) oder (38) drückt die Schiebung  $\gamma''$  in einer zu  $a''$ ,  $b''$ ,  $c''$  senkrechten Ebene aus. Die Längenänderung  $\lambda''$  in der gleichen Richtung — gemäß Gl. (27) — ist durch

$$\frac{1}{\lambda''} = \frac{a''}{\lambda_1} + \frac{b''}{\lambda_2} + \frac{c''}{\lambda_3} \quad (39)$$

gegeben.

#### 4. Natürliche Dehnung und natürliche Schiebung.

Bei Untersuchungen über homogene endliche Formänderungen ist es manchmal vorteilhaft, die Komponenten der natürlichen Dehnung und Schiebung einzuführen.

Die natürliche Dehnung  $\bar{\varepsilon}^{12}$  in der Richtung  $OP' = r'$  wird durch die Differentialgröße  $d\bar{\varepsilon} = dr'/r'$  definiert, die gleich der Längenänderung  $dr'$  geteilt durch die jeweilige Länge  $r'$  ist. Da  $r'^2 = r^2 \lambda$ , wird  $2 r' dr' = r^2 d\lambda$  und

$$d\bar{\varepsilon} = \frac{dr'}{r'} = \frac{d\lambda}{2\lambda} \quad (40)$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\ln \lambda}{2} = \ln(1 + \varepsilon) \quad \text{oder} \quad \lambda = e^{2\bar{\varepsilon}}. \quad (41)$$

<sup>12</sup> Die Dehnung  $\bar{\varepsilon} = \ln(1 + \varepsilon)$  als Maß für lineare Verzerrung bilsamer Materialien wurde zuerst von Ludwik und Leon 1909 (P. Ludwik: Elemente der Technologischen Mechanik, Berlin: Springer-Verlag, 1909) vorgeschlagen. Der Verfasser dieser Arbeit schlug vor, diese Dehnungen  $\varepsilon$  natürliche Dehnungen zu nennen [A. Nadai: J. appl. Physics 8, 205 (1937)]. Ihre Zweckmäßigkeit wurde besonders von Hencky: J. Rheology 2, 169 (1931), für die Beschreibung des Verhaltens von elastischem Gummi betont.

Für unzusammendrückbares Material gilt

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = e^{2(\bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2 + \bar{\varepsilon}_3)} = 1. \quad (42)$$

Nimmt man davon den Logarithmus, so folgt für die natürlichen Hauptdehnungen

$$\bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2 + \bar{\varepsilon}_3 = 0. \quad (43)$$

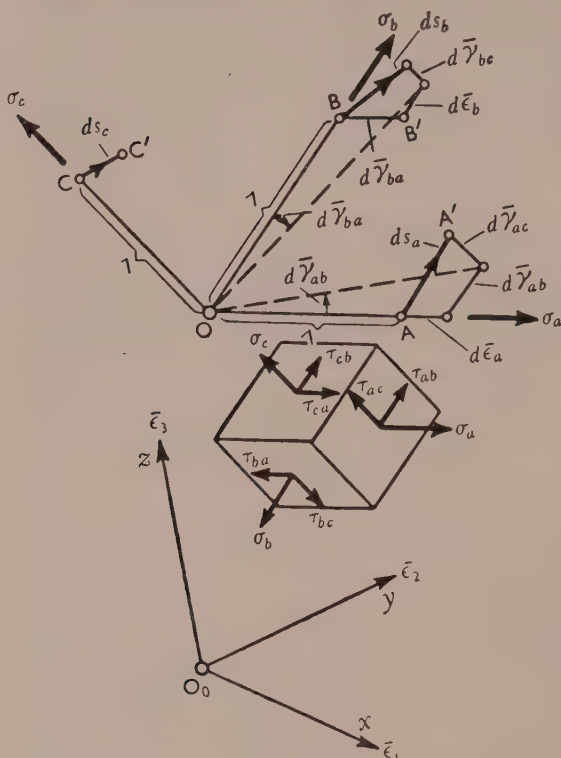


Abb. 15.

Die Differentiale der natürlichen Verzerrungen.

$OB$  und  $OC$  zusammenfallen, gegenüber den Ebenen dieser drei Linien verdreht werden, wenn die Verzerrung um ein Differential zunimmt.

Drei Differentiale der natürlichen Schiebungen sind hiermit definiert, nämlich

$$\left. \begin{aligned} d\bar{\gamma}_a &= d\bar{\gamma}_{bc} + d\bar{\gamma}_{ca}, \\ d\bar{\gamma}_b &= d\bar{\gamma}_{ca} + d\bar{\gamma}_{ab}, \\ d\bar{\gamma}_c &= d\bar{\gamma}_{ab} + d\bar{\gamma}_{bc}. \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Setzen wir die Komponenten der wahren Spannungen in denselben Richtungen  $\sigma_a$ ,  $\bar{\sigma}_b$ ,  $\bar{\sigma}_c$  und  $\bar{\tau}_{bc}$ ,  $\bar{\tau}_{ca}$ ,  $\bar{\tau}_{ab}$ , dann beträgt das Differential der Arbeit

$$dW = \bar{\sigma}_a d\bar{\varepsilon}_a + \bar{\sigma}_b d\bar{\varepsilon}_b + \bar{\sigma}_c d\bar{\varepsilon}_c + \bar{\tau}_{bc} d\bar{\gamma}_a + \bar{\tau}_{ca} d\bar{\gamma}_b + \bar{\tau}_{ab} d\bar{\gamma}_c. \quad (47)$$

Wenn  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  und  $d\bar{\varepsilon}_1$ ,  $d\bar{\varepsilon}_2$ ,  $d\bar{\varepsilon}_3$  die Hauptnormalspannungen und die Differentiale der natürlichen Hauptdehnungen sind, dann erhalten wir bei einem unzusammendrückbaren, verfestigungsfähigen Metall, für das  $\tau_0 = f(\bar{\gamma}_0)$  gilt, mit Benützung der später im Text gegebenen Spannungs-Dehnungs-Beziehungen für die Differentiale der natürlichen Verzerrungen

$$d\bar{\varepsilon}_1 = d\Phi \left( \sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right) \quad (47 a)$$

und

$$d\Phi = d\bar{\gamma}_0 / 3 \tau_0. \quad (47 b)$$

$OA, OB, OC$  werden in Abb. 15 als drei aufeinander senkrechte Längeneinheiten im verzerrten Körper angenommen (in Abb. 15 sind  $x, y, z$  die Hauptdehnungsrichtungen und  $\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2, \bar{\varepsilon}_3$  die natürlichen Hauptdehnungen). Wir lassen die Hauptrichtungen während des Anwachsens der Dehnungen um die Differentiale  $d\bar{\varepsilon}_1, d\bar{\varepsilon}_2, d\bar{\varepsilon}_3$  unverändert. Gemäß Gl. (43) gilt

$$d\bar{\varepsilon}_1 + d\bar{\varepsilon}_2 + d\bar{\varepsilon}_3 = 0. \quad (44)$$

Die Punkte  $A, B, C$  werden in neue Lagen  $A', B', C'$  verschoben. Wir setzen  $AA' = ds_a$ ,  $BB' = ds_b$ ,  $CC' = ds_c$  (Abb. 15) und bezeichnen die Komponenten dieser drei infinitesimalen Verschiebungsvektoren nach den Richtungen  $OA, OB$  bzw.  $OC$  mit

$$\left. \begin{aligned} ds_a \dots d\bar{\varepsilon}_a, \quad d\bar{\gamma}_{ab}, \quad d\bar{\gamma}_{ac}, \\ ds_b \dots d\bar{\gamma}_{ba}, \quad d\bar{\varepsilon}_b, \quad d\bar{\gamma}_{bc}, \\ ds_c \dots d\bar{\gamma}_{ca}, \quad d\bar{\gamma}_{cb}, \quad d\bar{\varepsilon}_c. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Die sechs Größen  $d\bar{\gamma}_{ab}, d\bar{\gamma}_{ba}, d\bar{\gamma}_{bc}, \dots$  sind die kleinen Winkel, um welche die Linien im Material, die mit  $OA$ ,

Für das Differential der Arbeit findet man

$$dW = \sigma_1 d\bar{\epsilon}_1 + \sigma_2 d\bar{\epsilon}_2 + \sigma_3 d\bar{\epsilon}_3 = \frac{9\bar{\gamma}_0^2}{2} d\Phi = \frac{3}{2} \tau_0 d\bar{\gamma}_0 \quad (47 c)$$

und die gesamte Arbeit je Volumeneinheit

$$W = \frac{3}{2} \int \tau_0 d\bar{\gamma}_0, \quad (47 d)$$

wo  $\tau_0$  die oktaedrale Schubspannung und  $d\bar{\gamma}_0$  das Differential der natürlichen oktaedralen Schiebung bedeutet. Für ein ideal-plastisches Material  $\tau_0 = \text{konst.}$  lautet die geleistete Arbeit

$$W = \frac{3}{2} \tau_0 \bar{\gamma}_0. \quad (47 e)$$

Gl. (46) kann man benützen, um die natürlichen Schiebungen zu definieren

$$\left. \begin{aligned} \bar{\gamma}_a &= \bar{\gamma}_{bc} + \bar{\gamma}_{cb}, \\ \bar{\gamma}_b &= \bar{\gamma}_{ca} + \bar{\gamma}_{ac}, \\ \bar{\gamma}_c &= \bar{\gamma}_{ab} + \bar{\gamma}_{ba}. \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Dabei vermerken wir, daß die Integration unter der Annahme auszuführen ist, daß die drei Richtungen  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  im Raume fest und unverändert in ihrer Lage zu den drei Hauptverzerrungsrichtungen  $x$ ,  $y$ ,  $z$  bleiben. Als Folge davon müssen während des Anwachsens der Verzerrung neue Linien im Material durch diese drei fixierten Richtungen hindurchgehen. Es muß dabei beachtet werden, daß die natürlichen Schiebungen nach Gl. (48) sich nicht mehr auf dieselben Linien im Material des verformten Körpers beziehen, wenn die Formänderung zunimmt. Sie beziehen sich auf solche Linien im Material, die aufeinanderfolgend durch ein im Raume festgehaltenes rechtwinkliges Dreiein hindurchwandern. Die drei natürlichen Schiebungen sind so in einer vollkommen ähnlichen Weise definiert, wie die natürlichen Dehnungen. Einige Beispiele werden ihre Nützlichkeit zeigen.

## 5. Ebene Verzerrungen eines unzusammendrückbaren Materiales.

Um den Fall zu zeigen, in dem die Verzerrung auch von einer Drehung der Hauptrichtungen begleitet ist, nehmen wir die lineare Transformation, die einen ebenen Verzerrungszustand definiert, an

$$\left. \begin{aligned} x' &= x \sqrt{\lambda_x} \cos \beta + y \sqrt{\lambda_y} \sin \delta, \\ y' &= x \sqrt{\lambda_x} \sin \beta + y \sqrt{\lambda_y} \cos \delta. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Die Konstanten wurden so gewählt, daß ein Punkt  $A$  ( $x = 1$ ,  $y = 0$ ) in einen Punkt  $A'$  ( $x' = \sqrt{\lambda_x} \cos \beta$ ,  $y' = \sqrt{\lambda_x} \sin \beta$ ) (Abb. 16) und ein Punkt  $B$  ( $x = 0$ ,  $y = 1$ ) in einen Punkt  $B'$  ( $x' = \sqrt{\lambda_y} \sin \delta$ ,  $y' = \sqrt{\lambda_y} \cos \delta$ ) verschoben wird.

Die Längenänderungen längs der Linien  $OA'$  und  $OB'$  werden  $\lambda_x$  und  $\lambda_y$  genannt. Die vier Konstanten  $\lambda_x$ ,  $\lambda_y$ ,  $\beta$  und  $\delta$  müssen der Bedingung der Unzusammendrückbarkeit des Materials genügen:

$$\sqrt{\lambda_x \lambda_y} \cos(\beta + \delta) = 1. \quad (50)$$

Eine Linie  $OP = r$ , die unter einem Winkel  $\alpha$  gegen die  $x$ -Achse geneigt ist, kommt in die Lage  $OP' = r'$  mit dem Neigungswinkel  $\alpha'$ . Nach Gl. (49) lautet die Längenänderung  $\lambda = r'^2/r^2$  in der Richtung  $OP'$

$$\lambda = \frac{\lambda_x + \lambda_y}{2} + \frac{\lambda_x - \lambda_y}{2} \cos 2\alpha + \sqrt{\lambda_x \lambda_y} \sin(\beta + \delta) \sin 2\alpha. \quad (51)$$

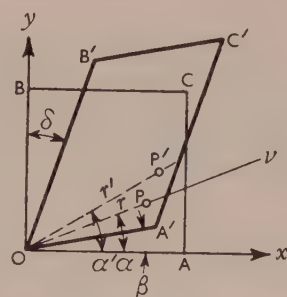


Abb. 16.  
Ebene Verzerrung.



Wenn wir die Schiebung  $\operatorname{tg}(\beta + \delta)$  mit  $\gamma_{\beta\delta}$  bezeichnen, so ersehen wir aus Gl. (50), daß  $\sqrt{\lambda_x \lambda_y} \sin(\beta + \delta) = \gamma_{\beta\delta}$  und deshalb

$$\lambda = \frac{\lambda_x + \lambda_y}{2} + \frac{\lambda_x - \lambda_y}{2} \cos 2\alpha + \gamma_{\beta\delta} \sin 2\alpha. \quad (52)$$

Ein Einheitsquadrat im unverzerrten Körper mit einem Neigungswinkel der Seiten  $\alpha$  und  $\alpha + \pi/2$  wird in ein Rhomboid mit gleichem Flächeninhalt und den Längenänderungen  $\lambda_\mu$  und  $\lambda_\nu$  verformt; für das Rhomboid mit der gleichen Fläche finden wir

$$\lambda_\mu \lambda_\nu = 1 + \gamma^2, \quad (53)$$

was dazu dient, den Wert der Schiebung  $\gamma$  unter Benützung der Gl. (52) zu berechnen:

$$\gamma = -\frac{\lambda_x - \lambda_y}{2} \sin 2\alpha + \gamma_{\beta\delta} \cos 2\alpha. \quad (54)$$

Aus den Gl. (52) und (54) erhält man nach Quadrieren und Addieren

$$\left(\lambda - \frac{\lambda_x + \lambda_y}{2}\right)^2 + \gamma^2 = \frac{(\lambda_x - \lambda_y)^2}{4} + \gamma_{\beta\delta}^2 \quad (55)$$

die Gleichung des „Verzerrungskreises“ in den Veränderlichen  $\lambda$ ,  $\gamma$ . Mit Rücksicht auf Gl. (53) muß die rechte Seite der Gl. (55) gleich  $\frac{(\lambda_x + \lambda_y)^2}{4} - 1$  sein.

Bei der Annahme  $\gamma = 0$  findet man die Hauptlängenänderungen zu

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{\lambda_x + \lambda_y}{2} \pm \sqrt{\frac{(\lambda_x - \lambda_y)^2}{4} - 1}, \quad \lambda_3 = 1, \quad (56)$$

welche der Bedingung  $\lambda_1 \lambda_2 = 1$  genügen.

## 6. Für reine Schiebung

( $\gamma_{\beta\delta} = 0$ ,  $\beta = \delta = 0$ ) mit den Hauptlängenänderungen  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2 = 1/\lambda_1$ , 1 ergibt sich

$$x' = \sqrt{\lambda_1} x, \quad y' = y/\sqrt{\lambda_1} \quad (57)$$

und

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{2} \left( \lambda_1 + \frac{1}{\lambda_1} \right) + \frac{1}{2} \left( \lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1} \right) \cos 2\alpha, \\ \gamma &= -\frac{1}{2} \left( \lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1} \right) \sin 2\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Eine Gerade  $E$  senkrecht zur Richtung  $OP = r$  durch den Punkt  $P$  geht nach der Verzerrung in eine Gerade  $E'$  über, die gegen die neue Richtung  $OP' = r'$  (Abb. 17) verdreht ist. Wenn  $E$  und  $E'$  die Spuren von zwei zur  $x$ ,  $y$ -Ebene senkrechten Ebenen sind, so muß der Tangens des Winkels  $\psi = \alpha' - \alpha''$  ( $\alpha''$  ist der Winkel der Normalen der Ebene  $E'$  mit der  $x$ -Achse) auch die Schiebung

$$\gamma = \operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg}(\alpha' - \alpha'') \quad (59)$$

angeben. Aus Gl. (57) folgt

$$\operatorname{tg} \alpha = \lambda_1 \operatorname{tg} \alpha', \quad (60)$$

$$\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} + \alpha \right) = \lambda_1 \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} + \alpha' \right)$$

oder

$$\operatorname{tg} \alpha'' = \lambda_1 \operatorname{tg} \alpha. \quad (61)$$

Gl. (60), (61) stellen die Winkeländerungen, wie sie durch eine reine Schiebung verursacht werden, dar. Wenn sie in Gl. (59) eingesetzt werden, erhält man Gl. (58) für die Schiebung  $\gamma$  wieder.

Die Längenänderung  $\lambda''$  in der Richtung  $OQ'$  senkrecht zur Ebene  $E'$  und die Schiebung  $\gamma$  in dieser letzteren Ebene kann für eine reine Schiebung auch als Funktion der Richtung  $\alpha''$  im verzerrten Körper (statt  $\alpha$ ) wie folgt ausgedrückt werden:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\lambda''} &= \frac{1}{2} \left( \lambda_1 + \frac{1}{\lambda_1} \right) - \frac{1}{2} \left( \lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1} \right) \cos 2 \alpha'', \\ \gamma &= - \frac{\left( \lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1} \right) \sin 2 \alpha''}{\lambda_1 + \frac{1}{\lambda_1} + \left( \lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1} \right) \cos \alpha''} \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

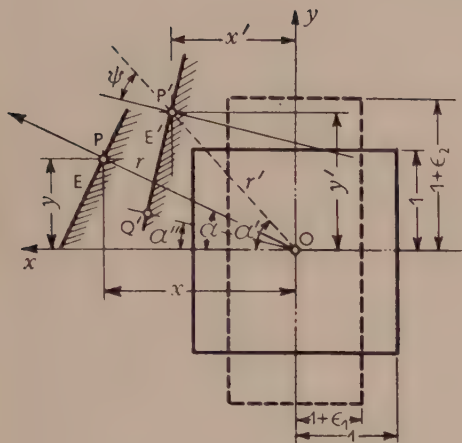


Abb. 17. Reine Schiebung.

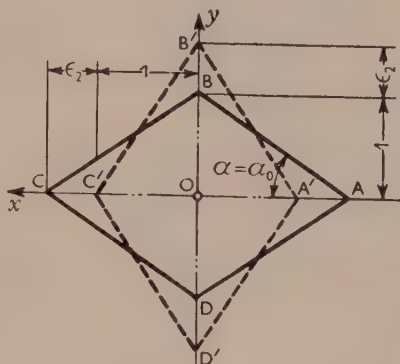


Abb. 18. Ungedehnte Rhomben bei reiner Schiebung.

### 6a. Darstellung der reinen Schiebung in natürlichen Verzerrungen.

Die vorhergehenden Ausdrücke können für die entsprechenden natürlichen Verzerrungen, die durch

$$\lambda = e^{2\bar{\epsilon}}, \quad \lambda'' = e^{2\bar{\epsilon}''} \quad (63)$$

gegeben sind, aufgestellt werden. Wenn die Größe einer reinen Schiebung mittels der natürlichen Dehnung  $\bar{\epsilon}_0$  gemessen wird,

$$\bar{\epsilon}_1 = -\bar{\epsilon}_2 = -\bar{\epsilon}_0, \quad (64)$$

so haben wir

$$\frac{1}{2} \left( \lambda_1 + \frac{1}{\lambda_1} \right) = \mathfrak{C} \cos 2 \bar{\epsilon}_0, \quad \frac{1}{2} \left( \lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1} \right) = -\mathfrak{S} \sin 2 \bar{\epsilon}_0, \quad (65)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = e^{-2\bar{\epsilon}_0} \operatorname{tg} \alpha' = e^{2\bar{\epsilon}_0} \operatorname{tg} \alpha''. \quad (66)$$

Mit den Abkürzungen

$$\left. \begin{aligned} s &= \sin 2 \alpha, & c &= \cos 2 \alpha, \\ s'' &= \sin 2 \alpha'', & c'' &= \cos 2 \alpha'', \\ S &= \mathfrak{S} \sin 2 \bar{\epsilon}_0, & C &= \mathfrak{C} \cos 2 \bar{\epsilon}_0 \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

können wir  $\lambda$ ,  $\lambda''$  und  $\gamma$  wie folgt ausdrücken:

$$\lambda = C - S c, \quad \lambda'' = \frac{1}{C + S c}, \quad \gamma = S s = \frac{S s''}{C - S c''}. \quad (68)$$

Bei einer reinen Schiebung wird ein bestimmter Rhombus  $ABCD$  (Abb. 18) in einen kongruenten Rhombus  $A'B'C'D'$ , bei welchem die spitzen und die stumpfen Winkel vertauscht sind, verformt. Für diesen „ungestreckten“ Rhombus gilt

$$c_0 = \cos 2 \alpha_0 = \frac{C - 1}{S} = \mathfrak{T} \bar{\epsilon}_0. \quad (69)$$

Die Gleichung des Verzerrungskreises lautet:

$$\left[ \lambda - \frac{1}{2} \left( \lambda_1 + \frac{1}{\lambda_1} \right) \right]^2 + \gamma^2 = \frac{1}{4} \left( \lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1} \right)^2 \quad (70)$$

oder

$$(\lambda - \mathfrak{U} \mathfrak{O} \mathfrak{I} 2 \bar{\varepsilon}_0)^2 + \gamma^2 = \mathfrak{E} \text{in}^2 2 \bar{\varepsilon}_0. \quad (71)$$

Wir bemerken, daß die größte der drei Hauptlängenänderungs-Schiebungs-Ellipsen, die in Abschnitt 1 eingeführt wurden, für einen Zustand der reinen Schiebung ein

Kreis wird, und daß die beiden kleineren Ellipsen ähnlich werden  $B_x = B_y = A_x A_y$  (Abb. 19).

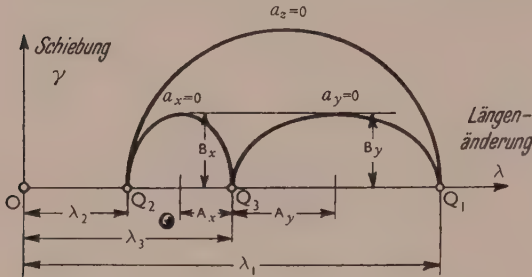


Abb. 19. Reine Schiebung  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 1/2$ ,  $\lambda_3 = 1$ .

Punkt  $P'$  bewegt sich in diesen zwei Richtungen um proportional verkleinerte Beträge, nämlich um  $-\bar{d}\bar{\varepsilon}_0 \cos \alpha''$  und  $\bar{d}\bar{\varepsilon}_0 \sin \alpha''$ . Auf diese Weise sind die Komponenten

von  $P'P''$  proportional  $\cos \alpha''$  und  $\sin \alpha''$ , und wenn man sie auf die Richtungen  $OP'$  ( $n$ ) und  $OQ'$  ( $m$ ) projiziert, so erhalten wir die Differentiale der natürlichen Dehnung  $d\bar{\varepsilon}_n$  und der Schiebung  $d\bar{\gamma}_{nm}$  zu

$$\left. \begin{aligned} d\bar{\varepsilon}_n &= -\bar{d}\bar{\varepsilon}_0 \cos 2\alpha'', \\ d\bar{\gamma}_{nm} &= \bar{d}\bar{\varepsilon}_0 \sin 2\alpha''. \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

Ähnlich

$$\left. \begin{aligned} d\bar{\varepsilon}_m &= \bar{d}\bar{\varepsilon}_0 \cos 2\alpha'', \\ d\bar{\gamma}_{mn} &= \bar{d}\bar{\varepsilon}_0 \sin 2\alpha''. \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

Daher beträgt das Differential der natürlichen Schiebung  $d\bar{\gamma}$  für die senkrechten Richtungen  $n$  und  $m$  im verzerrten Körper

$$d\bar{\gamma} = d\bar{\gamma}_{nm} + d\bar{\gamma}_{mn} = 2\bar{d}\bar{\varepsilon}_0 \sin 2\alpha''. \quad (74)$$

Integrieren wir diese Gleichung vom unverzerrten Zustand zu einem verzerrten Zustand  $\bar{\varepsilon}_0$ , während der Winkel  $\alpha''$  konstant bleibt, so erhalten wir

$$\bar{\gamma} = 2\bar{\varepsilon}_0 \sin 2\alpha''. \quad (75)$$

Wir werden  $\bar{\gamma}$  die natürliche Schiebung erster Art nennen. Sie ist proportional  $\sin 2\alpha''$ . Sie besteht aus der Summe der Winkeldifferentiale, die durch die Schenkel eines rechten Winkels, der im Raum während der Verformung des Körpers festgehalten

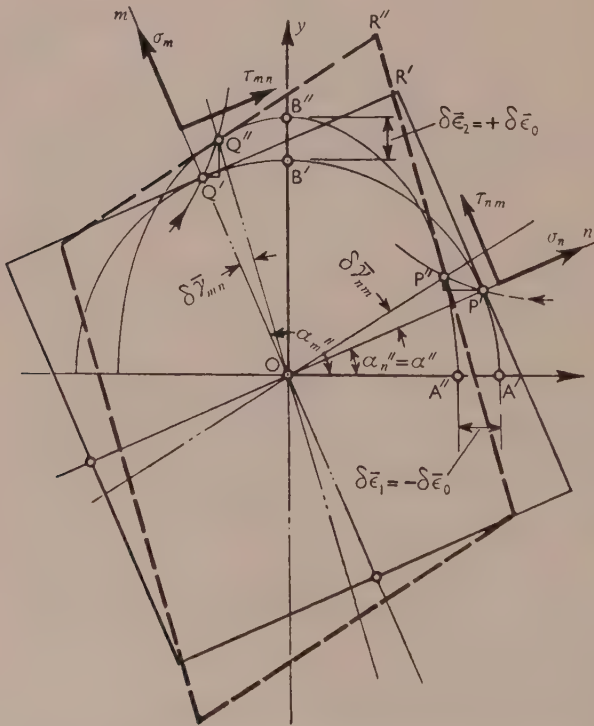


Abb. 20. Die Differentiale der reinen Schiebung.



ist, durchwandern. (Der rechte Winkel, der in Abb. 21 dargestellt ist, könnte auf eine Glasplatte gezeichnet gedacht werden, die über dem Körper in fester Lage gehalten wird.)

Wir können anderseits daran denken, Gl. (74) so zu integrieren, daß wir die kleinen Winkel summieren, um die sich eine Gerade, welche die ursprünglich mit den Punkten der Normalen  $OP'$  eines Schnittes, wie z. B.  $P'R'$  (oder  $OQ'$ ) in Abb. 20, zusammenfallenden Punkte enthält, gegenüber der Normalen desselben Schnittes in ihren neuen Lagen dreht. Offensichtlich schließt die Gerade  $OP''$  einen Winkel mit der neuen Normalen auf  $P''R''$  ein, der doppelt so groß wie der Verdrehungswinkel des Querschnittes  $P'Q'$ , nämlich  $-d\alpha''$  ist. Somit ist  $d\bar{\gamma} = 2 d\bar{\gamma}_{nm} = -2 d\alpha''$ . Mit anderen Worten bedeutet dies das Konstanthalten des Winkels  $\alpha$  (was dazu dient, einen „Querschnitt“ durch das verzerrte Material zu definieren). Differenzieren wir

$$\operatorname{tg} \alpha'' = e^{-2\bar{\varepsilon}_0} \operatorname{tg} \alpha, \quad (76)$$

während wir  $\alpha = \text{konst.}$  halten

$$\frac{d\alpha''}{\cos^2 \alpha''} = -2 e^{-2\bar{\varepsilon}_0} \operatorname{tg} \alpha d\bar{\varepsilon}_0, \quad (77)$$

ergibt sich nach Gl. (76) für

$$d\alpha'' = -d\bar{\varepsilon}_0 \sin 2\alpha'' \quad (78)$$

und finden in diesem Fall, daß, wie festgestellt,

$$d\bar{\gamma} = -2 d\alpha''. \quad (79)$$

Integrieren wir vom unverzerrten Zustand des Körpers, in dem  $\alpha'' = \alpha$ , bis die Verzerrung den Wert  $\bar{\varepsilon}_0$  erreicht hat, dann erhalten wir

$$\bar{\gamma} = 2(\alpha - \alpha''), \quad (80)$$

eine Gleichung, die die natürliche Schiebung zweiter Art definiert. Die Schiebung  $\bar{\gamma}$  ist das Integral der Winkeldifferentiale, welche durch die geometrische Normale  $n$  eines gegebenen Materialquerschnittes hindurchgehen.<sup>13</sup>

Wir bemerken, daß die natürliche Schiebung  $\bar{\gamma}$  im Zustand der reinen Schiebung ihren Größtwert für den Winkel  $\alpha'' = 45^\circ$  und  $\bar{\gamma}_{\max} = 2\bar{\varepsilon}_0$  erreicht. Der Größtwert der natürlichen Schiebung  $\bar{\gamma}$  bei einer gegebenen Verzerrung  $\bar{\varepsilon}_0$  wird anderseits erreicht, wenn

$$\operatorname{tg} \alpha = e^{\bar{\varepsilon}_0} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \alpha'' = e^{-\bar{\varepsilon}_0}. \quad (81)$$

Diese zwei Winkel  $\alpha$  und  $\alpha''$  gehören gerade zu den Normalen der Seiten des ungestreckten Rhombus (Abb. 22). Mit diesen speziellen Werten und  $\alpha''$  findet man

$$\operatorname{tg} \left( \frac{\bar{\gamma}_{\max}}{2} \right) = \operatorname{Sh} \bar{\varepsilon}_0. \quad (82)$$

Um einen Zustand der reinen Schiebung zu erzeugen, ist ein Spannungszustand

$$\sigma = -\tau_0 \cos 2\alpha'', \quad \tau = \tau_0 \sin 2\alpha'' \quad (83)$$

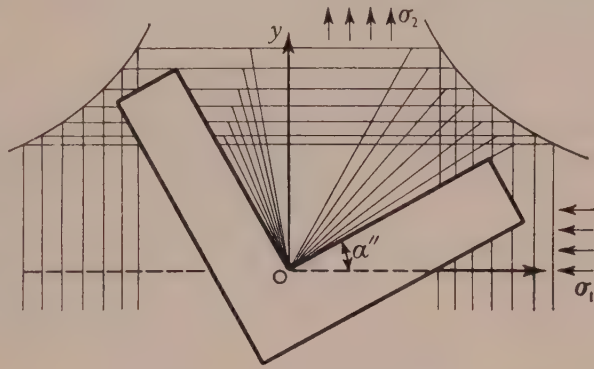


Abb. 21. Differentiale  $d\bar{\gamma}$ .

<sup>13</sup> Beim Versuch, passende Veränderliche zur Charakterisierung von Winkeländerungen zu definieren, können wir feststellen, daß die übliche Schiebung  $\gamma = \operatorname{tg} \psi$  eine Lagrangesche Veränderliche (auf zwei Materiallinien bezogen) darstellt, die natürliche Schiebung erster Art  $\bar{\gamma}$  eine Eulersche Veränderliche, während die Schiebung zweiter Art  $\bar{\gamma}$  eine halb-Lagrangesche Veränderliche in der Terminologie, die in der Hydromechanik zur Charakterisierung des Bezugssystems verwendet wird, genannt werden könnte.

mit den Hauptnormalspannungen  $\sigma_1 = -\tau_0$ ,  $\sigma_2 = \tau_0$ ,  $\sigma_3 = 0$  erforderlich. Das Differential der Arbeit je Volumeneinheit ist

$$dW = \sigma_1 d\bar{\varepsilon}_1 + \sigma_2 d\bar{\varepsilon}_2 = 2 \tau_0 d\bar{\varepsilon}_0. \quad (84)$$



Abb. 22. Ungedehnte Rhomben.

Allgemeiner ausgedrückt, lautet die Arbeit, die von den Spannungskomponenten geleistet wird, die an der Oberfläche eines

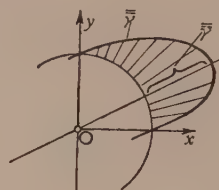


Abb. 23. Werte  $\bar{\gamma} = f(\alpha'')$ .

im Raum beliebig orientierten Einheitswürfels wirken (so ein Würfel war durch den quadratischen Querschnitt  $OP'R'Q'$  in Abb. 20 gegeben),

$$dW = \sigma_n d\bar{\varepsilon}_n + \sigma_m d\bar{\varepsilon}_m + \tau_{nm} d\bar{\gamma}_{nm} + \tau_{mn} d\bar{\gamma}_{mn}. \quad (85)$$

Wenn nun

$$\alpha_n'' = \alpha'', \quad \sigma_n = -\tau_0 \cos 2 \alpha'', \quad \tau_{nm} = \tau_0 \sin 2 \alpha''$$

und

$$\alpha_m'' = \frac{\pi}{2} + \alpha'', \quad \sigma_m = \tau_0 \cos 2 \alpha'', \quad \tau_{mn} = \tau_0 \sin 2 \alpha'',$$

dann ist

$$dW = 2 \tau_0 d\bar{\varepsilon}_0 (\cos^2 2 \alpha'' + \sin^2 2 \alpha'') = 2 \tau_0 d\bar{\varepsilon}_0 \quad (86)$$

in Übereinstimmung mit dem ersteren Wert. Der letzte Ausdruck für  $dW$  beweist die Nützlichkeit der Einführung eines Differentials der natürlichen Schiebung erster Art  $d\bar{\gamma}$ .

## 7. Einfache Schiebung.

Dieser Fall ergibt sich aus Abschnitt 5 unter der Annahme  $\lambda_x = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\sqrt{\lambda_y} \cos \delta = 1$  und  $\tan \delta = \gamma_{\beta\delta} = \gamma_s$ . Die Größe  $\gamma_s$  ist ein Maß der einfachen Schiebung

$$\left. \begin{aligned} x' &= x + \gamma_s y, \\ y' &= y. \end{aligned} \right\} \quad (87)$$

Die Längenänderung  $\lambda$  und Schiebung  $\gamma$ , die zu einer zur  $x$ -Achse unter dem Winkel  $\alpha$  geneigten Geraden im unverzerrten Körper gehören, erhält man aus Gl. (52) und (54) zu

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= 1 + \frac{\gamma_s^2}{2} - \frac{\gamma_s^2}{2} \cos 2 \alpha + \gamma_s \sin 2 \alpha, \\ \gamma &= \frac{\gamma_s^2}{2} \sin 2 \alpha + \gamma_s \cos 2 \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (88)$$

Der Verzerrungskreis hat die Gleichung

$$\left( \lambda - 1 - \frac{\gamma_s^2}{2} \right)^2 + \gamma^2 = \gamma_s^2 \left( 1 + \frac{\gamma_s^2}{4} \right) \quad (89)$$

und die Hauptlängenänderungen lauten

$$\lambda_1, \lambda_2 = 1 + \frac{\gamma_s^2}{2} \pm \gamma_s \sqrt{1 + \frac{\gamma_s^2}{4}} = \left( \sqrt{1 + \frac{\gamma_s^2}{4}} \pm \frac{\gamma_s}{2} \right)^2. \quad (90)$$

Bei einem unzusammendrückbaren Material ist eine ebene Verzerrung im wesentlichen eine reine Schiebung, verbunden mit einer Drehung der Hauptdehnungsrichtungen.<sup>14</sup> Eine einfache Schiebung ist daher auch eine reine Schiebung, verbunden mit einer bestimmten Drehung. Die Hauptrichtungen bei einfacher Schiebung und jene zwei zueinander senkrechten Richtungen im unverzerrten Körper, die nach der Verzerrung die Hauptdehnungsachsen sind, findet man einfach durch die Konstruktion der „ungestreckten Rhomben“<sup>15</sup> im verzerrten und unverzerrten Körper.

Obwohl anzunehmen ist, daß diese elementaren geometrischen Eigenschaften einer reinen und einfachen Schiebung — teilweise im Buche von Love<sup>16</sup> über die Elastizitätstheorie beschrieben — den Ingenieuren wohlbekannt sind, wurden sie hier vorgebracht, um die Behandlung solcher Verzerrungszustände im Bereich der plastischen Formänderung der Metalle zu klären.<sup>17</sup>

In einem isotropen Material muß die gegebene Größe einer endlichen einfachen Schiebung  $\gamma_s$  einer bestimmten Größe einer reinen Schiebung gleichwertig sein, die

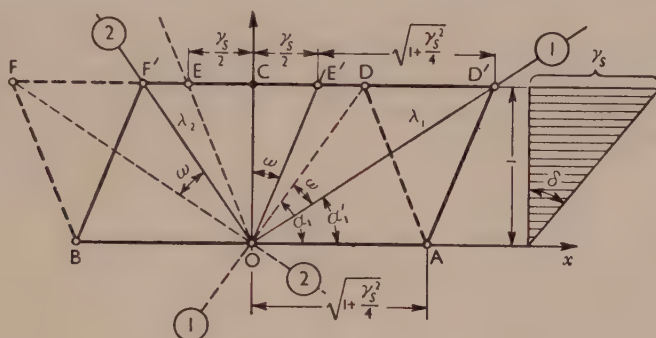


Abb. 24. Einfache Schiebung.

man z. B. durch die in Abschnitt 6a eingeführte natürliche Dehnung  $\bar{\epsilon}_0$  messen kann. Die Hauptlängenänderungen für eine reine Schiebung sind

$$\lambda_1 = e^{2\bar{\epsilon}_0}, \quad \lambda_2 = e^{-2\bar{\epsilon}_0}. \quad (93)$$

Die gleichwertige einfache Schiebung  $\gamma_s$  muß dieselben Hauptlängenänderungen haben. Aus Gl. (90) folgt aber

$$\frac{\gamma_s^2}{2} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} - 1 = \frac{e^{2\bar{\epsilon}_0} + e^{-2\bar{\epsilon}_0}}{2} - 1 = \cosh 2\bar{\epsilon}_0 - 1. \quad (94)$$

<sup>14</sup> Siehe Fußnote 7 im Abschnitt 1, S. 147.

<sup>15</sup> Man nimmt für einfache Schiebung  $\gamma_s = \tan \delta$  in Abb. 24  $OC = 1$  und  $EC = CE' = \gamma_s/2$ .  $OE$ ,  $OE'$  sind die Richtungen und Längen  $\sqrt{1 + \gamma_s^2/4}$  der Seiten in den zwei kongruenten Rhomben  $OEDA$  und  $OE'D'A'$ , die jene Geraden im unverzerrten und verzerrten Körper darstellen, die ihre Längen nicht ändern (die ersteren sind strichliert, die letzteren voll ausgezogen). Die Diagonalen  $OD'$  und  $OF'$  sind die Hauptdehnungsrichtungen, die Diagonalen  $OD$  und  $OF$  die entsprechenden Richtungen im unverzerrten Körper. Wenn  $\alpha_1$  und  $\alpha_1'$  die halben stumpfen und spitzen Winkel in den beiden Rhomben bezeichnen, dann folgt aus Abb. 24:

$$\tan \alpha_1 = \frac{OC}{CD} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\gamma_s^2}{4}} - \frac{\gamma_s}{2}}, \quad \tan \alpha_1' = \frac{OC}{UD'} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\gamma_s^2}{4}} + \frac{\gamma_s}{2}}. \quad (91)$$

Wir sehen, daß der Drehungswinkel  $\omega$  der Hauptrichtungen gegeben ist durch

$$\tan \omega = \tan (\alpha_1 - \alpha_1') = \frac{\gamma_s}{2} = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{2}. \quad (92)$$

<sup>16</sup> A. E. H. Love: Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, 1906. S. 34. Cambridge.

<sup>17</sup> C. Zener und J. H. Hollomon: Amer. Soc. Metals, preprint No. 9 for convention, Oktober 1943.



Daher ergibt die Bedingung

$$\gamma_s = 2 \sin \bar{\varepsilon}_0 \quad (95)$$

die Größe einer einfachen Schiebung  $\gamma_s$ , die einer reinen Schiebung von der Größe  $\bar{\varepsilon}_0$  gleichwertig ist. Weil der Größtwert der natürlichen Schiebung  $\bar{\gamma}_{\max}$  für den Zustand der reinen Schiebung zu  $2\bar{\varepsilon}_0$  gefunden wurde, gilt auch  $\gamma_s = 2 \sin (\bar{\gamma}_{\max}/2)$ .

Ich verdanke es Sir Geoffrey Taylor aus Cambridge, meine Aufmerksamkeit auf die Tatsache gelenkt zu haben, daß nicht die gleiche mechanische Arbeit aufgewendet werden muß, um einen idealplastischen Körper bleibend nach einfacher oder endlicher reinen Schiebung zu verformen, obwohl die Verzerrung in Übereinstimmung mit der durch Gl. (95) ausgedrückten Bedingung für die Gleichwertigkeit dieselbe ist. Es mag jedoch von Interesse sein festzustellen, daß, wenn zur Erzeugung eines Zustandes einer endlichen einfachen Schiebung  $\gamma_s$  ein ebener Spannungszustand  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  herangezogen wird — statt einer reinen Schubspannung  $\tau_{xy}$  allein —, in einem idealplastischen Material dieselbe Arbeit erforderlich ist zur Erzeugung einer einfachen endlichen Schiebung und ihrer gleichwertigen reinen Schiebung. Ferner drücken Gl. (110) den erforderlichen ebenen Spannungszustand  $\sigma_x = -\sigma_y, \tau_{xy}$  aus. Die Komponenten  $\sigma_x, \sigma_y$  tragen zur Arbeit nichts bei, aber ihr Vorhandensein macht ein kleineres  $\tau_{xy}$  erforderlich, um das Material fließen zu lassen, als wenn  $\sigma_x = \sigma_y = 0$  wäre. Die von der Schubspannung

$$\tau_{xy} = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 + \frac{\gamma_s^2}{4}}} \quad (95a)$$

bei einfacher Schiebung geleistete Arbeit ist

$$W = \int \tau_{xy} d\gamma_s = \tau_0 \int_0^{\gamma_s} \frac{d\gamma_s}{\sqrt{1 + \frac{\gamma_s^2}{4}}} \quad (95b)$$

Benützen wir die Bedingungen für die gleichwertigen Verzerrungen Gl. (95)

$$\gamma = 2 \sin \bar{\varepsilon}_0, \quad (95c)$$

dann erhalten wir für die Arbeit

$$W = 2 \tau_0 \bar{\varepsilon}_0, \quad (95d)$$

dieselbe, welche man zur Verformung eines idealplastischen Materials bei einer endlichen reinen Schiebung der Größe  $\bar{\varepsilon}_0$  braucht.

## 8. (Beispiel 1). Endliche reine Schiebung in einem unzusammendrückbaren isotropen elastischen Material.

Bei den Spannungs-Dehnungs-Beziehungen wollen wir annehmen, daß (ähnlich wie bei unendlich kleinen Verzerrungen) zwei Elastizitätskonstanten erforderlich sind — z. B. der Elastizitätsmodul  $E$  und die Poissonsche Zahl  $\nu = 1/2$ . Wir können auch erwarten, daß die bekannten Spannungs-Dehnungs-Beziehungen des Hooke'schen Gesetzes für unendlich kleine Verzerrungen für die Differentiale der natürlichen Verzerrungen gültig bleiben:

$$E d\bar{\varepsilon}_1 = d\sigma_1 - \frac{d\sigma_2}{2}, \quad E d\bar{\varepsilon}_2 = d\sigma_2 - \frac{d\sigma_1}{2}. \quad (96)$$

Daher folgt für reine Schiebung:

$$\left. \begin{aligned} d\sigma_1 &= -d\sigma_2 = -d\tau_0, \\ d\bar{\varepsilon}_1 &= -d\bar{\varepsilon}_2 = -d\bar{\varepsilon}_0 \end{aligned} \right\} \quad (97)$$

und nach der Integration aus der ersteren Gleichung:

$$\bar{\varepsilon}_1 = -\bar{\varepsilon}_2 = -\bar{\varepsilon}_0 = -\frac{3\tau_0}{2E} = -\frac{\tau_0}{2G}. \quad (98)$$

( $G = E/3$ , Schubmodul.)

Ferner gilt für elastisches Material:

$$d\bar{\gamma} = d\tau/G. \quad (99)$$

Das Differential  $d\tau$  beträgt

$$d\tau = d\tau_0 \sin 2\alpha''. \quad (100)$$

Für einen konstanten Wert von  $\alpha''$  erhalten wir durch Integration

$$\bar{\gamma} = 2\bar{\varepsilon}_0 \sin 2\alpha'' = \tau_0 \sin 2\alpha''/G = \tau/G \quad (101)$$

und sehen, daß die bekannte Beziehung  $\gamma = \tau/G$  für unendlich kleine Schiebungen auch für die natürliche Schiebung  $\bar{\gamma}$  erhalten bleibt.<sup>18</sup>

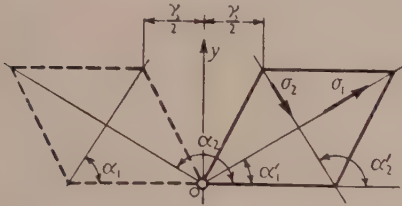


Abb. 25. Haupttrichtung für eine einfache Schiebung  $\gamma_s$ .

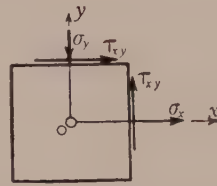


Abb. 26. Erforderlicher ebener Spannungszustand zur Erzeugung einer endlichen, einfachen Schiebung.

## 9. (Beispiel 2.) Einfache Schiebung $\gamma_s$ im elastischen Material.

Bei den ungestreckten Rhomben sehen wir, daß die Tangenten der Neigungswinkel der Diagonalen im unverzerrten Körper ausgedrückt werden durch

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\gamma_s^2}{4} - \frac{\gamma_s}{2}}}, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{-1}{\sqrt{1 + \frac{\gamma_s^2}{4} + \frac{\gamma_s}{2}}} \quad (102)$$

und im verzerrten Zustand durch

$$\operatorname{tg} \alpha_1' = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\gamma_s^2}{4} + \frac{\gamma_s}{2}}}, \quad \operatorname{tg} \alpha_2' = \frac{-1}{\sqrt{1 + \frac{\gamma_s^2}{4} - \frac{\gamma_s}{2}}} \quad (103)$$

Es sind  $\alpha_1 + \alpha_2' = \pi$ ,  $\alpha_1' + \alpha_2 = \pi$  (Abb. 25). Für die Hauptverzerrungsrichtungen gilt

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2}{\gamma_s}, \quad \operatorname{tg} 2\alpha' = \frac{2}{\gamma_s}. \quad (104)$$

<sup>18</sup> Um auch die Beziehung zwischen der üblichen Schiebung  $\gamma$  und der Schubspannung  $\tau$  für denselben Fall eines elastischen Zustandes reiner Schiebung von der Größe  $\bar{\varepsilon}_0$  aufzustellen, beachten wir, daß aus Gl. (68)  $\gamma = Ss$ ,  $S = \mathfrak{E} \sin 2\bar{\varepsilon}_0 = \gamma/s$

$$2\bar{\varepsilon}_0 = \mathfrak{A}r \mathfrak{E} \sin (\gamma/s) = \ln \left( \frac{\gamma}{s} + \sqrt{1 + \frac{\gamma_s^2}{s^2}} \right)$$

und aus Gl. (101)  $\tau = \tau_0 s'' = 2G\bar{\varepsilon}_0 s''$  folgt. So erhält man einen Ausdruck für die Schubspannung

$$\tau = 2G\bar{\varepsilon}_0 s/(C + Ss) = 2G\bar{\varepsilon}_0 \sin 2\alpha/(\mathfrak{C} \cos 2\bar{\varepsilon}_0 + \mathfrak{S} \sin 2\bar{\varepsilon}_0 \cos 2\alpha).$$

Wir nehmen z. B.  $\alpha = 45^\circ$ , wobei  $s = 1$ ,  $c = 0$ , dann ergibt sich für

$$\tau = \frac{2G\bar{\varepsilon}_0}{\mathfrak{C} \cos 2\bar{\varepsilon}_0} = G \frac{\ln (\gamma + \sqrt{1 + \gamma^2})}{\mathfrak{C} \cos (\gamma + \sqrt{1 + \gamma^2})}.$$

Man sieht, daß die Schubspannung  $\tau$  eine ziemlich komplizierte Funktion der üblichen Schiebung  $\gamma$  ist.

Ist  $\gamma_s$  unendlich klein, so wird die einfache Schiebung durch ein System von Schubspannungen  $\tau_{xy}$  erzeugt. Wenn  $\gamma_s$  endlich große Werte hat, so genügt dieses System nicht mehr, weil die Hauptspannungsrichtungen eines derartigen Spannungszustandes mit der  $x$ -Achse die konstanten Winkel  $45^\circ$  bzw.  $135^\circ$  einschließen und daher nicht mit den Hauptverzerrungsrichtungen  $\alpha_1', \alpha_2'$  zusammenfallen können. Die Hauptspannungs- und Hauptverzerrungsachsen kann man in einem elastischen Material durch einen Spannungszustand

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha'' + \tau_{xy} \sin 2\alpha'', \\ \tau &= -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha'' + \tau_{xy} \cos 2\alpha'' \end{aligned} \right\} \quad (105)$$

zur Deckung bringen. Für die Hauptspannungsrichtungen gilt

$$\operatorname{tg} 2\alpha'' = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}. \quad (106)$$

Diese Richtungen fallen mit den Hauptverzerrungsrichtungen zusammen, wenn wir setzen

$$\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2}{\gamma_s}. \quad (107)$$

Die Summe der Hauptnormalspannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  des gleichwertigen Zustandes der reinen Schiebung  $\sigma_1 = -\tau_0$ ,  $\sigma_2 = \tau_0$  verschwindet. Dies muß auch für den ebenen Spannungszustand nach Gl. (105) gelten. Das erfordert  $\sigma_x + \sigma_y = 0$ . Folglich muß  $\sigma_x - \sigma_y = 2\sigma_x$  werden. Die Hauptspannungen des ebenen Spannungszustandes lauten dann

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = -\sqrt{\sigma_x^2 + \tau_{xy}^2} = -\tau_0. \quad (108)$$

So erhalten wir für die Bestimmung der zwei unbekannten Spannungskomponenten  $\sigma_x$  und  $\tau_{xy}$  zwei Gleichungen

$$\sigma_x^2 + \tau_{xy}^2 = \tau_0^2, \quad \frac{\tau_{xy}}{\sigma_x} = \frac{2}{\gamma_s} \quad (109)$$

und aus diesen

$$\sigma_x = \frac{\tau_0 \gamma_s}{2 \sqrt{1 + \frac{\gamma_s^2}{4}}}, \quad \tau_{xy} = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 + \frac{\gamma_s^2}{4}}}. \quad (110)$$

Gemäß Abschnitt 7 ergibt eine einfache Schiebung von der Größe  $\gamma_s$  dieselbe Verformung wie eine reine Schiebung von der Größe  $\bar{\epsilon}_0$ , wenn  $\gamma_s = 2 \operatorname{Sin} \bar{\epsilon}_0$ . Nachdem wir diesen letzteren Wert für  $\gamma_s$  in die zwei vorstehenden Ausdrücke eingesetzt haben, finden wir für einen ebenen Verzerrungszustand die für die Erzeugung der einfachen Schiebung  $\gamma_s = 2 \operatorname{Sin} \bar{\epsilon}_0$  in einem elastisch-isotropen Material erforderlichen drei Komponenten

$$\sigma_x = -\sigma_y = 2G\bar{\epsilon}_0 \mathfrak{Lg} \bar{\epsilon}_0, \quad \tau_{xy} = \frac{2G\bar{\epsilon}_0}{\mathfrak{Cot} \bar{\epsilon}_0}. \quad (110a)$$

In diesen letzteren Gleichungen wurde  $2G\bar{\epsilon}_0$  für  $\tau_0$  eingesetzt.

Wenn man diese drei Spannungskomponenten als Funktionen der Größe  $\gamma_s$  ausdrücken möchte, dann führe man folgende, aus Gl. (98) sich ergebende Ausdrücke ein:

$$\tau_0 = 2G\bar{\epsilon}_0 = G \mathfrak{Ar} \operatorname{Sin} \frac{\gamma_s}{2} = G \ln \left( \frac{\gamma_s}{2} + \sqrt{1 + \frac{\gamma_s^2}{4}} \right). \quad (111)$$

Diese Ausdrücke können sich vielleicht bei Materialien anwendbar erweisen, die sich bei sehr großen Verzerrungen elastisch verhalten, wie z. B. Bänder aus nicht-vulkanisiertem elastischem Gummi usw. Sie können jedoch nicht für Dehnungen empfohlen werden, die so groß sind, daß eine der Voraussetzungen der vorangehenden



Gleichungen, nämlich die Isotropie des Materials, ungültig wird. Es ist bekannt, daß Gummi in seinem elastischen Verhalten merklich anisotrop zu werden beginnt, wenn er mehr als auf das Drei- oder Vierfache seiner ursprünglichen Länge gedehnt wird.

Wenn eine der Hauptrichtungen ( $\alpha_1'$ ) allmählich mit wachsenden Werten von  $\gamma_s$  gegen die  $x$ -Achse gedreht wird, so zeigt die Verformung die Tendenz in eine reine Schiebung überzugehen, deren Hauptachsen parallel zur  $x$ - und  $y$ -Achse liegen. Wir bemerken noch, daß die zwei Komponenten der Normalspannung  $\sigma_x, \sigma_y$  im Zusammenhang mit einer einfachen Schiebung  $\gamma_s$  keinerlei Arbeit leisten (irgendeine Faser, die gerade zur  $x$ - oder  $y$ -Achse parallel ist, erleidet durch das nachfolgende Differential der Schiebung  $d\gamma_s$  keine Längenänderung). Nur die Komponenten  $\tau_{xy}$  leisten Arbeit.

### III. Zusammensetzung kleiner elastischer und bleibender Verzerrungen in plastischen Körpern — Theorie des Fließens.

Die Verzerrungen der Elemente eines Körpers, der unter einem System von Kräften fließt, bestehen aus einem umkehrbaren elastischen und einem bleibenden Anteil. In der Theorie der kleinen Formänderungen eines Materials mit scharf definierter Fließgrenze ist die Berücksichtigung des elastischen Anteiles der Verzerrungen, wenn die bleibenden Formänderungen vorherrschen, oft nicht notwendig: Wenn die bleibenden Anteile der Verzerrungen genügend groß sind, so können die elastischen Anteile vernachlässigt werden. In diesen Fällen genügt es, die Spannungs-Dehnungs-Beziehungen nur für bleibende Verzerrungen anzusetzen. In anderen Fällen jedoch, z. B. am Beginn des Fließens, wenn in einem elastischen Material in bestimmten Teilen des Körpers infolge des Erreichens der Plastizitätsgrenze ein plastischer Bereich entsteht, sind die bleibenden Verzerrungen in diesen Gebieten von derselben Größenordnung wie die elastischen Anteile. In solchen Fällen, oder wenn die Relaxation eines Systems von Spannungen, bei welcher die gesamte Verformung zwischen festen Begrenzungen des Körpers konstant bleibt, untersucht wird, müssen die elastischen und die bleibenden Anteile der Verzerrungen berücksichtigt werden. Wenn ein Körper nur teilweise fließt, so gibt es unter bestimmten Lasten Bereiche, in denen der Körper nur elastisch und andere, in denen er bleibend verformt wird. In diesen letzteren Gebieten besitzen die Verzerrungen sowohl elastische als auch plastische Anteile. Ein weicher Stahl unter allmählich zunehmenden großen Verzerrungen kann als ein Beispiel für ein Material betrachtet werden, das sich in dieser eben erwähnten Art verformt.

Versuche mit weichem Stahl und mit anderen Metallen stützen überdies die Auffassung, daß die Gesamtverzerrung eines Körperelementes im plastisch verformten Gebiet des Körpers die Summe aus einer elastischen und einer plastischen Verzerrung ist. Der resultierende Verzerrungstensor in einem Punkt ist die Summe aus einem elastischen und einem plastischen Verzerrungstensor. Die Komponenten des elastischen Verzerrungstensors werden dem Hookeschen Elastizitätsgesetz entsprechend proportional den Komponenten des Spannungstensors angenommen. Es wird vorausgesetzt, daß die Elastizitätskonstanten des Metalles während der Verformung unverändert bleiben — eine durch Versuche bestätigte Tatsache. Diese zwei Tensoren sind koaxial, das heißt ihre Hauptrichtungen müssen stets zusammenfallen.

Mit Rücksicht auf die Orientierung der Hauptachsen des resultierenden Verzerrungstensors zu den Hauptrichtungen des Spannungstensors oder Hauptspannungsrichtungen können mehrere wichtige Fälle unterschieden werden.

# 10. Der resultierende Verzerrungstensor und der Spannungstensor sind koaxial.

Wir werden in den elastischen und plastischen Spannungs-Dehnungs-Beziehungen die elastischen und bleibenden Anteile der Verzerrungen mit einem bzw. zwei Strichen bezeichnen.  $\varepsilon$  bedeutet eine bezogene Dehnung,  $\gamma$  eine Schiebung,  $\sigma$  eine Normal- und  $\tau$  eine Schubspannung,  $E, G = E/2 (1 + \nu')$ ,  $K = E/3 (1 - 2 \nu')$  den Elastizitäts-, Schub- und Kompressionsmodul des Materiales, ferner  $\nu', \nu''$  die Poissonschen Zahlen für die elastischen bzw. bleibenden Verzerrungen. Die Gesamtkomponenten der Verzerrung sind durch folgende Summen definiert:

$$\varepsilon_x = \varepsilon'_x + \varepsilon''_x, \dots \quad \gamma_{yz} = \gamma'_{yz} + \gamma''_{yz}, \dots \text{ usw.} \quad (112)$$

Nehmen wir für die elastischen Verzerrungen das Hookesche Gesetz als gültig an, dann ist

$$\varepsilon'_x = [\sigma_x - \nu' (\sigma_y + \sigma_z)]/E, \dots \quad \gamma'_{yz} = \tau_{yz}/G, \dots \text{ usw.} \quad (113)$$

Wenn  $\varepsilon'$  die mittlere elastische Dehnung und  $\sigma$  die mittlere Normalspannung bedeutet,

$$\varepsilon' = (\varepsilon'_x + \varepsilon'_y + \varepsilon'_z)/3, \quad \sigma = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3, \quad (114)$$

dann erhalten wir aus der Summe der drei Gl. (113) für die Dehnungen

$$\varepsilon' = (1 - 2 \nu') \sigma/E = \sigma/3 K = k \sigma, \quad (115)$$

wo die Konstante  $k = 1/3 K$ .

Die sechs Gl. (113) können in einer zweiten Form ausgedrückt werden, wenn man  $\varepsilon'$  von  $\varepsilon'_x, \varepsilon'_y, \varepsilon'_z$  und  $\sigma$  von  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  abzieht und diese deviatorischen Teile der zwei Tensoren verknüpft:

$$\varepsilon'_x - \varepsilon' = (\sigma_x - \sigma)/2 G, \dots \quad \gamma'_{yz}/2 = \tau_{yz}/2 G, \dots \quad (116)$$

was auch symbolisch geschrieben werden kann:

$$D_{\varepsilon'} = D_{\sigma}/2 G.$$

Die zwanglosen, freien Formänderungen eines Materialelementes unter einem Spannungssystem  $\sigma_x, \sigma_y, \dots$  vollziehen sich mit Verzerrungsgeschwindigkeiten, welche den rechtsstehenden Ausdrücken in den folgenden Gleichungen proportional sind:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_x'' &= \frac{\partial \varepsilon_x''}{\partial t} = \Phi'' [\sigma_x - \nu'' (\sigma_y + \sigma_z)], \dots \\ \dot{\gamma}_{yz}'' &= \frac{\partial \gamma_{yz}''}{\partial t} = 2 (1 + \nu'') \Phi'' \tau_{yz}, \dots \end{aligned} \right\} \quad (117)$$

$\Phi''$  ist eine veränderliche Größe. Diese sechs Gleichungen bringen zum Ausdruck, daß die jeweiligen Geschwindigkeiten der bleibenden Schiebungen den entsprechenden Schubspannungen proportional sind. Diese Komponenten der Verzerrungsgeschwindigkeiten können für eine stetige, langsame Formänderung durch die bleibenden Verzerrungen ersetzt werden und die plastischen Spannungs-Dehnungs-Beziehungen erhalten die Form

$$\varepsilon_x'' = \Phi'' [\sigma_x - \nu'' (\sigma_y + \sigma_z)], \dots \quad \gamma_{yz}'' = 2 (1 + \nu'') \Phi'' \tau_{yz} \quad (118)$$

Es muß jedoch ausdrücklich hinzugefügt werden, daß Spannungs-Dehnungs-Gleichungen in dieser endlichen Form der Gl. (118) für die bleibenden Anteile der Verzerrung nur dann gelten, wenn die sechs Komponenten der Fließspannungen in einem festen Punkt im ideal-plastischen Körper gegebene, feste Werte besitzen und sich die letzteren während der allmählich sich entwickelnden bleibenden Ver-

formung nicht ändern. Auch gelten sie nur für unendlich kleine Verzerrungskomponenten.<sup>19</sup>

Um die resultierenden Verzerrungen in symmetrischer Form auszudrücken, setzen wir in Gl. (113)  $1/E = \Phi'$ . Addieren wir die entsprechenden Ausdrücke aus Gl. (113) und (118), dann erhalten wir z. B. für  $\varepsilon_x$  und für  $\gamma_{yz}$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x' + \varepsilon_x'' = (\Phi' + \Phi'') \left[ \sigma_x - \frac{\nu' \Phi' + \nu'' \Phi''}{\Phi' + \Phi''} (\sigma_y + \sigma_z) \right] \\ \gamma_{yz} &= \gamma_{yz}' + \gamma_{yz}'' = 2 (\Phi' + \Phi'') \left[ 1 + \frac{\nu' \Phi' + \nu'' \Phi''}{\Phi' + \Phi''} \right] \tau_{yz} \end{aligned} \right\} \quad (119)$$

Mit folgenden Abkürzungen:

$$\Phi = \Phi' + \Phi'', \quad \nu = \frac{\nu' \Phi' + \nu'' \Phi''}{\Phi' + \Phi''} \quad (120)$$

können diese Spannungs-Dehnungs-Beziehungen für die Komponenten des resultierenden Verzerrungstensors wie folgt ausgedrückt werden:

$$\varepsilon_x = \Phi [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)], \dots \quad \gamma_{yz} = 2 (1 + \nu) \Phi \tau_{yz}, \quad (121)$$

$\Phi'$ ,  $\nu'$ ,  $\nu''$  sind Materialkonstanten,  $\Phi''$  und  $\Phi$  sind Veränderliche vom Charakter reziproker Moduln. Die Größe  $\nu$  kann als veränderliche Poissonsche Zahl aufgefaßt werden.

Für Stahl ist  $\nu' = 0.3$  und für die meisten bildsamen Metalle  $\nu'' = 1/2$  (das heißt die Dichte des Materials ändert sich bei rein plastischer Formänderung nicht). Bei Annahme des Wertes  $\nu'' = 1/2$  tragen die bleibenden Verzerrungen zur Volumsdilatation nichts bei, daher ist

$$\varepsilon_x'' + \varepsilon_y'' + \varepsilon_z'' = 0. \quad (122)$$

An der Begrenzungsfläche zwischen dem elastischen und dem plastischen Gebiet im Inneren eines beanspruchten Körpers ist  $\Phi'' = 0$  und daher  $\Phi = \Phi'$  und  $\nu = \nu'$ . Da  $\Phi''$  von den Spannungen abhängt und diese im allgemeinen Funktionen der Raumkoordinaten sind, muß die Gleichung  $\Phi'' = 0$  die Begrenzungsfläche eines fortschreitenden plastischen Bereiches oder einer Zone im beanspruchten Körper bestimmen.

Wenn mit der Zunahme der bleibenden Verzerrungen  $\Phi''$  und  $\Phi$  groß im Vergleich zu  $\Phi' = 1/E$  werden, so nähert sich  $\nu$  allmählich dem Wert  $\nu'' = 1/2$ . Für monoton wachsendes  $\Phi$  verändert sich  $\nu$  zwischen den Werten  $0.3 \leq \nu \leq 0.5$ .

Die Gesamtvolumsdilatation ist

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 3 (1 - 2 \nu) \Phi \sigma. \quad (123)$$

Da die bleibenden Verzerrungen dazu nichts beitragen, so muß sie auch gleich sein

$$\varepsilon_x' + \varepsilon_y' + \varepsilon_z' = 3 k \sigma \quad (124)$$

und deshalb

$$(1 - 2 \nu) \Phi = k = \text{konst.} \quad (125)$$

<sup>19</sup> Die Gl. (118) und die aus ihnen weiter abgeleiteten Beziehungen [(119) bis (121)] verlieren ihre Gültigkeit nicht unter allgemeineren Fließgesetzen, z. B. sind sie gültig auch für ein Metall im Verfestigungsbereich der Dehnungen. Im letzteren Falle sind sie gültig unter den folgenden einschränkenden Bedingungen: 1. die bleibenden Anteile der Dehnungen sind klein, 2. die Hauptachsen der Spannung drehen sich nicht relativ zum Körper und 3. das Verhältnis der Hauptspannungen ( $\sigma_2/\sigma_1$  und  $\sigma_3/\sigma_1$ ) ändert sich nicht während der Zunahme der Spannungswerte  $\sigma_x, \sigma_y, \dots$  mit den bleibenden Dehnungen  $\varepsilon_x'', \varepsilon_y'', \dots$ . Wenn die Annahmen 1 und 2 zutreffen, jedoch 3 nicht zutrifft, müssen die Spannungs-Dehnungs-Beziehungen für die unendlich kleinen Zuwächse angeschrieben werden [siehe die Gl. (176), (177)].



Die erste Gl. (121) kann für den deviatorischen Teil der resultierenden Verzerrung nach Abzug des  $\varepsilon' = k \sigma$  von  $\varepsilon_x$  wie folgt ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x - \varepsilon' &= (1 + \nu) \Phi \sigma_x - (3 \nu \Phi + k) \sigma \\ &= (1 + \nu) \Phi \sigma_x - (3 \nu + 1 - 2 \nu) \Phi \sigma, \\ \varepsilon_x - \varepsilon' &= (1 + \nu) \Phi (\sigma_x - \sigma).\end{aligned}$$

Wenn wir eine neue Funktion  $\Psi$

$$\Psi = 2(1 + \nu) \Phi \quad (126)$$

definieren, dann können wir die Spannungs-Dehnungs-Beziehungen für die resultierende Verzerrung in Deviatorform wie folgt schreiben:

$$\left. \begin{aligned}\varepsilon_x - \varepsilon' &= \frac{\Psi}{2} (\sigma_x - \sigma), & \frac{\gamma_{yz}}{2} &= \frac{\Psi}{2} \tau_{yz}, \\ \varepsilon_y - \varepsilon' &= \frac{\Psi}{2} (\sigma_y - \sigma), & \frac{\gamma_{zx}}{2} &= \frac{\Psi}{2} \tau_{zx}, \\ \varepsilon_z - \varepsilon' &= \frac{\Psi}{2} (\sigma_z - \sigma), & \frac{\gamma_{xy}}{2} &= \frac{\Psi}{2} \tau_{xy},\end{aligned} \right\} \quad (127)$$

in welchen die linken Seiten die sechs Komponenten des Deviators der resultierenden Verzerrung bilden. Nach A. A. Ilyushin<sup>20</sup> kann dies in symbolischer Form wie folgt geschrieben werden:

$$D_\varepsilon = \frac{\Psi}{2} D_\sigma. \quad (128)$$

$D_\varepsilon$  und  $D_\sigma$  bezeichnen hier die Deviatoren der resultierenden Verzerrungen und Spannungen.

Ein Vergleich der beiden Formen dieser Beziehungen [Gl. (121) und (127)] mit den entsprechenden Spannungs-Dehnungs-Beziehungen [Gl. (113) und (116)] lassen ihre vollkommene Ähnlichkeit erkennen. An Stelle der Faktoren in diesen letzteren Gleichungen

$$1/E, \quad 1/G = 2(1 + \nu')/E, \quad \nu'$$

treten in den ersteren Gleichungen die Funktionen

$$\Phi, \quad \Psi = 2(1 + \nu) \Phi, \quad \nu.$$

Wir wollen  $\Phi$  und  $\Psi$  die Fließfunktionen für Zug bzw. Schub nennen. Wenn die bleibenden Verzerrungen im Vergleich zu den elastischen stark überwiegen und wir  $\nu' = 1/2$  annehmen (das heißt Unzusammendrückbarkeit für die plastischen Verzerrungen), wird ähnlich wie bei einem elastischen unzusammendrückbaren Stoff  $1/E = 3/G$  beim plastischen Material  $\Phi = \Psi/3$ . Durch die Einführung der drei Veränderlichen  $\Phi$ ,  $\Psi$ ,  $\nu$  wird die vollkommene Analogie zwischen den Spannungs-Dehnungs-Beziehungen für die resultierenden Verzerrungen eines elastisch-plastischen Stoffes und jenen eines rein elastischen Materials zum Ausdruck gebracht.

## 11. Gleichgewicht plastischer Materialien.

Die Spannungen, bei denen bildsame Metalle sich bei Temperaturen weit unterhalb des Rekristallisationsbereiches bleibend verformen, scheinen nicht sehr von der Formänderungsgeschwindigkeit abhängig zu sein. Die früheren Beobachtungen Ludwiks und anderer Forscher sowie Versuche von Davis<sup>21</sup> und Manjoine<sup>22</sup>

<sup>20</sup> A. A. Ilyushin: Prikladnaya Matematika i Mekhanika (Applied Maths. and Mechs.) 9, Nr. 1, 101 (1945) (übersetzt 1946 in Westinghouse Research Laboratories).

<sup>21</sup> A. Nadai und E. A. Davis: Trans. Amer. Soc. mechan. Engr. (J. appl. Mechan.) 58, Nr. 1, A-7 (1936).

<sup>22</sup> M. J. Manjoine: High-Speed Tension Tests at Elevated Temperatures. Trans. Amer. Soc. mechan. Engr. (J. appl. Mechan.) 63, Nr. 2, A-77 (1942).

haben neuerlich gezeigt, daß die Fließspannungen von Aluminium, Kupfer, Eisen<sup>23</sup> usw. bei normalen Temperaturen langsam wie die Logarithmen der Formänderungsgeschwindigkeiten dieser Metalle zunehmen, und zwar

$$\tau = \tau^* \ln \frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}^*}. \quad (129)$$

$\tau^*$ ,  $\dot{\gamma}^*$  sind Materialkonstanten.

Unter Vernachlässigung des Einflusses der Schiebungsgeschwindigkeit auf die Fließspannungen bei normaler oder langsamer Verformung (Stoßerscheinungen, bei denen der Einfluß beachtlich werden kann, sind ausgeschlossen) wird der Ausdruck „plastisch“ im folgenden in dem Sinne verwendet, daß er eine „geschwindigkeits-unabhängige“ bleibende, sich mit kleinen Fließgeschwindigkeiten vollziehende Verformung bezeichnet.

Wir nehmen kleine, ausschließlich bleibende Verzerrungen in unzusammendrückbarem Material an und führen die oktaedralen Komponenten der Spannung und Verzerrung ein:

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3, \\ \tau_0 &= \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}, \\ \varepsilon &= (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)/3, \\ \gamma_0 &= \frac{2}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (130)$$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  sind die Hauptnormalspannungen und  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  die Hauptdehnungen. Wir werden allgemein die oktaedrale Schubspannung  $\tau_0$  als Maß der Intensität derjenigen Spannung, die eine plastische Formänderung verursachen kann und ähnlich die oktaedrale Schiebung  $\gamma_0$  als Maß der Intensität der bleibenden Formänderungen ansehen.<sup>24</sup> Einige Fälle werden behandelt.

a) Idealplastisches Material. Idealplastisch nennen wir ein Material, wenn es unter einer konstanten oktaedralen Schubspannung  $\tau_0 = \text{konst.}$  unabhängig vom Wert der mittleren Normalspannung  $\sigma$  fließt. Wenn  $\sigma_0$  die Fließspannung für reinen Zug ist, wobei  $\sigma_1 = \sigma_0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$  gilt, so fließt das Material immer, wenn

$$\tau_0 = \sqrt{2} \sigma_0/3 = \text{konst.} \quad (131)$$

oder wenn

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2 \sigma_0^2 = \text{konst.} \quad (132)$$

Diese Gleichung mit den drei Veränderlichen  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  kann im Raum als eine Fläche dargestellt werden. Nach einem Vorschlag von Haigh<sup>25</sup> und Westergaard<sup>26</sup> fassen wir die Hauptspannungen  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  als rechtwinklige Koordinaten auf. Dann stellt Gl. (132) die Fließgrenzfläche eines idealplastischen Materiales dar. Sie ist ein Kreis-

<sup>23</sup> Die Anfangsfließspannung bei weichen Stählen („obere Fließgrenze“) ist gegen eine Änderung der Dehnungsgeschwindigkeit empfindlicher als die Fließspannungen in der Nähe des Größtwertes der Last im Zugdiagramm. Die Wirkung der Verzerrungsgeschwindigkeit auf die Spannungen des Fließbeginns ist bei kohlenstoffarmen Stählen komplizierterer Natur als bei anderen Stählen. H. Quinney: Further Tests on Effect of Time in Testing. Engineer 161, 669 (1936). — E. A. Davis: Effect of Speed of Stretching and Rate of Loading on Yielding of Mild Steel. Trans. Amer. Soc. mechan. Engr. (J. appl. Mechan.) 60, A-137 (1938). — M. J. Manjoine: Trans. Amer. Soc. mechan. Engr. (J. appl. Mechan.) 66, Nr. 4 A-211 (1944).

<sup>24</sup> A. Nadai: J. appl. Physics 1937, 205, 418.

<sup>25</sup> B. P. Haigh: Engineering 109, 158 (1920). (1919,) 21, 23 Reports British Association.

<sup>26</sup> H. M. Westergaard: J. Franklin Inst. 1930 (Mai).

zylinder, dessen Achse gleiche Winkel mit den  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ -Achsen einschließt und einen Halbmesser von der Größe  $\sqrt{2/3} \sigma_0$  hat (Abb. 27).

Wenn die Hauptnormalspannungen nicht explizit bekannt sind und der Spannungstensor die Komponenten  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$  hat, so lautet  $\tau_0$ :

$$\tau_0 = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}.^{27} \quad (133)$$

Entsprechend den Spannungs-Dehnungs-Beziehungen Gl. (127) ist jede Schiebung gleich dem Produkt aus der Fließfunktion  $\Psi$  für Schub und der entsprechenden Schubspannung  $\tau$ . Daher ist auch  $\gamma_0 = \Psi \tau_0$ . Für ein ideal-plastisches Material gilt

$$\Psi = \frac{\gamma_0}{\tau_0} = \frac{3 \gamma_0}{\sqrt{2} \sigma_0} \quad \text{und} \quad \Phi = \frac{\Psi}{3} = \frac{\gamma_0}{\sqrt{2} \sigma_0}. \quad (134)$$

In diesem Falle sind die Fließfunktionen  $\Psi$  und  $\Phi$  der Intensität der plastischen Verzerrung  $\gamma_0$  direkt proportional, wobei  $\sigma_0$  eine Materialkonstante ist.

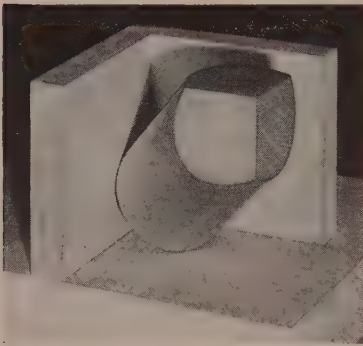


Abb. 27. Fließgrenzfläche.

Die Theorie des ideal-plastischen Materials erscheint auf Grund dieser Postulate und der Form der plastischen Spannungs-Dehnungs-Beziehungen Gl. (118) formuliert.<sup>28</sup> Die erhaltenen Gleichungen stimmen im wesentlichen mit den von R. von Mises<sup>29</sup> vorgeschlagenen überein.

b) Verwandte Theorien auf Grund anderer Fließbedingungen. Die frühere Theorie des plastischen Materials von St. Venant und Levy aus den Siebzigerjahren des neunzehnten Jahrhunderts war ein Vorläufer der heutigen Theorie eines ideal-plastischen Materials. Sie unterscheidet sich von der heutigen wesentlich in einem Punkt,

nämlich in der Form der Plastizitätsbedingung. Diese wurde wie folgt angenommen:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \pm \sigma_0 \quad \text{oder} \quad \sigma_2 - \sigma_1 = \pm \sigma_0 \quad \text{oder} \quad \sigma_3 - \sigma_2 = \pm \sigma_0 \quad (135)$$

in Übereinstimmung mit der Hypothese jener Zeit, daß die Metalle dann fließen, wenn die größte Schubspannung einen gegebenen Grenzwert erreicht.

Diese Gl. (135) stellen drei Paare paralleler Ebenen dar, durch die ein regelmäßiges sechsseitiges Prisma als Fließgrenzfläche dem Kreiszyylinder Gl. (132) eingeschrieben wird. Die Versuchsergebnisse, die man über das Fließen der bildsamen

<sup>27</sup> Wie H. Hencky: Z. angew. Math. Mech. 4, 323 (1924), gezeigt hat, ist die linke Seite der Fließbedingung Gl. (132) auch der Gestaltänderungsenergie im elastischen Material proportional. Die Punkte  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  innerhalb der zylindrischen Fließgrenzfläche stellen rein elastische Spannungszustände dar. Nach W. M. Baldwin jr.: Amer. Inst. Min. and Metallurgical Engr., Chicago meeting 1946 (Februar), kann der plastische Verzerrungszustand in ähnlicher Art in einem rechtwinkligen Koordinatensystem  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  dargestellt werden. Die Bedingung der Unzusammendrückbarkeit des Materiales  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$  bedeutet, daß die Punkte, die plastische Verzerrungszustände darstellen, in einer Ebene liegen, die senkrecht auf die Achse des Zylinders Gl. (132) steht und die den Ursprung der  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ -Achsen enthält.

<sup>28</sup> Im allgemeinen Fall haben wir zu Verfügung: 1. sechs Spannungs-Dehnungs-Beziehungen Gl. (118); 2. sechs weitere Gleichungen, die die Verzerrungskomponenten mit den Ableitungen der drei Verschiebungskomponenten verbinden und 3. drei Gleichungen für die Gleichgewichtsbedingungen; zusammen also fünfzehn unabhängige Gleichungen für sechzehn Unbekannte (die sechs Spannungskomponenten  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ , die sechs Verzerrungskomponenten  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ , die drei Verschiebungskomponenten  $u, v, w$  und die Fließfunktion  $\psi$ ). Die sechzehnte Gleichung wird durch die Plastizitätsbedingung geliefert.

<sup>29</sup> R. von Mises: Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1913.



Metalle während der letzten fünfundzwanzig Jahre erhielt, stützen im allgemeinen die Fließbedingung Gl. (132) besser. In der praktischen Anwendung ist es oft erlaubt, die zylindrische Fließgrenzfläche durch eine Tangential- oder ihr benachbarte Ebene zu ersetzen, wenn nämlich die die Fließspannungen darstellenden Punkte auf einen verhältnismäßig kleinen Teil der ersteren Fläche beschränkt sind.

Mohr<sup>30</sup> und Guest<sup>31</sup> zogen eine ähnliche Fließbedingung heran. Sie nahmen an, daß der Grenzwert der Schubspannung, die eine plastische Formänderung in bestimmten Materialien verursacht, eine Funktion der Normalspannung sei, die im Querschnitt der entstehenden plastischen Gleitung wirkt. Nach Mohr entspricht dies einer Fließbedingung, in welcher die Differenz der zwei Hauptnormalspannungen  $\sigma_1 - \sigma_3$  eine Funktion ihrer Summe  $\sigma_1 + \sigma_3$  ist (was einen Einfluß der „mittleren“ Hauptnormalspannung  $\sigma_2$  ausschließt) — nach Guest ist es eine lineare Funktion:  $(\sigma_1 - \sigma_3) = c_1 + c_2 (\sigma_1 + \sigma_3)$ . Die entsprechende Fließgrenzfläche in einem Koordinatensystem  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  wird durch einen schlanken prismatischen Körper mit regelmäßigen Sechsecken als ebene Querschnitte, deren Seitenlängen jedoch veränderlich sind (Mohr) und eine schlanke sechsstufige Pyramide (Guest) dargestellt. Die beiden Flächen sind so orientiert, daß ihre Achsen gleiche Winkel mit den  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ -Achsen einschließen.<sup>32</sup> Die Fließbedingung von Guest als auch die von Mohr kann für solche Materialien angewendet werden, bei welchen die Fließspannung für einachsigen Zug verschieden von der Fließspannung für einachsigen Druck ist oder für Materialien, bei denen (in der Ausdrucksweise von Guest) ein „volumetrischer“ Einfluß in der Fließbedingung zu berücksichtigen ist. Dies kann auf eine andere Art mit Benützung der Mohrschen Spannungsdarstellung ausgedrückt werden. Es bedeutet die Annahme, daß die größten der drei Hauptspannungskreise, die einen Spannungszustand an der Plastizitätsgrenze darstellen, eine gemeinsame Hüllkurve in der Mohrschen Spannungsebene  $\sigma$  (Normalspannung),  $\tau$  (Schubspannung) haben. Wird die Guestsche Fließbedingung angenommen, so liegen die größten Hauptspannungskreise tangential an zwei zur  $\sigma$ -Achse symmetrisch geneigten Geraden in der  $\sigma, \tau$ -Ebene.<sup>33</sup>

Für Materialien, die für einachsigen Zug bei einer Spannung  $\sigma_t$  und für einachsigen Druck bei einer Spannung  $\sigma_c$ , deren absoluter Wert größer als  $\sigma_t$  sein kann, fließen, läßt sich eine andere Fließbedingung aufstellen. Man erhält sie dadurch, daß man den schlanken sechsstufigen prismatischen Körper oder die Pyramide, gemäß den Mohrschen und Guestschen Annahmen, durch eine Umdrehungsfläche als Fließgrenzfläche ersetzt.

Dann ergibt sich, daß die oktaedrale Schubspannung  $\tau_0$  Gl. (130) eine gegebene Funktion der mittleren Spannung  $\sigma = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$  (die auf die Oktaederflächen der Spannungen wirkt) ist oder daß

$$\tau_0 = f(\sigma). \quad (136)$$

Diese Gleichung stellt eine Umdrehungsfläche im Koordinatensystem  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  dar, deren Achse mit den  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ -Achsen gleiche Winkel einschließt.

<sup>30</sup> O. Mohr: Z. Ver. dtsh. Ing. 1900, 1572.

<sup>31</sup> J. J. Guest: Yield Surface in Combined Stress. Philos. Mag. J. Sci. 150, 261 (1940).

<sup>32</sup> A. Meldahl: Brown Boveri Rev. (Zürich) 1944, 260, zeigt in einem Überblick über die Anstrengungshypothesen Photographien von Gipsmodellen der Fließgrenzflächen zum Vergleich der verschiedenen Hypothesen. Die meisten dieser Modelle haben nur historisches Interesse. Unter diesen befindet sich auch ein Modell für die oben im Text erwähnte Mohrsche Theorie.

<sup>33</sup> Die Grenzbedingung gegen Gleiten beim ebenen Gleichgewichtsproblem loser Massen, wie z. B. Sand, deckt sich in geometrischer und mechanischer Hinsicht mit dieser letzten Bedingung, bei der die größten Mohrschen Kreise zwei geneigte Gerade als Einhüllende haben. Auf diese Annahme gründet sich die Coulombsche Theorie des Erddruckes in losem Boden. Die zwei Geraden schneiden sich im Ursprung der  $\sigma, \tau$ -Spannungsachsen in der Mohrschen Spannungsebene.

Wenn z. B. ein Kreiskegel als Fließgrenzfläche gewählt wird, so lautet Gl. (136) explizit ausgedrückt:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2 [c_0 (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) - c_1]^2, \quad (137)$$

worin

$$c_0 = \frac{\sigma_o - \sigma_t}{\sigma_o + \sigma_t}, \quad c_1 = \frac{2 \sigma_o \sigma_t}{\sigma_o + \sigma_t} \quad (137a)$$

zwei Konstanten sind.

Die Spitze des Kegels hat den Abstand

$$c_2 = \frac{2 \sigma_o \sigma_t}{\sqrt{3} (\sigma_o - \sigma_t)} \quad (137b)$$

vom Ursprung des Koordinatensystems  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  und der Tangens des halben Öffnungswinkels des Kegels ist

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2} \frac{\sigma_o - \sigma_t}{\sigma_o + \sigma_t}.^{34} \quad (137c)$$

Wenn  $\sigma_t = \sigma_o = \sigma_0$  ist, wird die Fläche ein Kreiszylinder und wir erhalten aus Gl. (137) wieder die Gl. (132), welche die Bedingung  $\tau_0 = \text{konst.}$  für das Fließen eines ideal-plastischen Materials darstellt.

(Eingegangen am 11. Januar 1949.)

(Fortsetzung folgt.)

## Buchbesprechungen.

**A Text Book of Electronics.** Von *J. M. A. Lenihan*. Mit Textabb., 211 S. London: English Universities Press Ltd. 1948. Geb. 12 s. 6 d. net.

Der Zweck des vorliegenden Buches ist es, in einfachster und dennoch exakter Weise die physikalischen Grundlagen der Elektrizitätslehre zu vermitteln und die Anwendbarkeit dieser Wissenschaft auf die verschiedenen Gebiete der Technik zu beschreiben.

Das Buch gliedert sich in 16 Kapiteln, von denen die ersten acht den Grundlagen gewidmet sind, während die nächsten acht sich mit der Anwendung der Elektrizität in der Praxis befassen. Der Reihe nach werden nach einer kurzen Einführung in den ersten acht Kapiteln die Elektrizitätsleitung in Gasen und Dämpfen, die Thermo- und Photoelektronenemission sowie die Grundlagen der Röntgenstrahlen, die Wechselstromtheorie, die Gleichrichterröhren, die Glühkathodenröhren, die Verstärkerrohren und die elektrischen Schwingungen besprochen.

Die weiteren acht Kapitel behandeln die Verwendung der Elektrizität zur drahtlosen Nachrichtenvermittlung, die Verwendung der photoelektrischen Zellen, die Gasentladungsröhren, der elektrischen Heizung, der Elektrotherapie, der Kathodenstrahloszillographie, des Fernsehens und die Elektronenmikroskopie.

Der Kürze des Buches entsprechend kann natürlich jedes Kapitel nur eine ganz allgemeine Einführung in die Grundlagen liefern. Da auf mathematische Behandlung weitgehend verzichtet wird und in erster Linie die physikalischen Grundgesetze und Methoden gebracht werden, ist das Buch hauptsächlich wohl Schülern und physikalisch interessierten Laien zu empfehlen. Es ist jedoch nicht die Absicht des Buches, technische Einzelheiten zu vermitteln, sondern den Leser in die physikalische Gedankenwelt einzuführen. So gibt das Buch besonders in den der Anwendung gewidmeten Kapiteln auch keine Anleitung zu praktischer Durchführung, sondern vermittelt das Verständnis der Funktion der Geräte und Apparate. Vorausgesetzt werden vom Leser bloß elementare physikalische und mathematische Vorkenntnisse. Das Buch ist daher nicht geeignet, Studierende zu einer Prüfung vorzubereiten, sondern soll den angehenden Studenten der verschiedenen Wissenschaften die physikalischen Grundlagen vermitteln, um die Wirkungsweise der Elektronenröhren zu verstehen.

*F. Regler, Wien.*

<sup>34</sup> Es sollte beachtet werden, daß bei allen diesen Beispielen, in welchen durch eine mathematische Extrapolation die Fließgrenzfläche die Raumdiagonale  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$  schneidet, ein Teil dieser Fläche in der Umgebung des Schnittpunktes ausgeschlossen werden muß, weil kein Material unter allseitig gleicher Zugbeanspruchung fließen kann. Eine der Gl. (136) ähnliche Bedingung hat F. Schleicher: Z. angew. Math. Mechan. **6**, 216 (1926), vorgeschlagen.



**Flußkraftwerke und Stromwerke.** Von *A. Grzywiński*. Mit 20 Textabb., 24 S. Wien: Springer-Verlag. 1948. S 15.—, sfr. 6.50, \$ 1.50.

An eine Übersicht über die Bauformen der Wasserkraftwerke schließt sich eine eingehende Darstellung der Fluß- und Stromwerke, die auch der jüngsten Entwicklung auf diesem Gebiete Rechnung trägt. Besonders wertvoll wird die kleine Schrift durch den nach verschiedenen Gesichtspunkten geführten Vergleich der einzelnen Bauweisen, durch Angaben über deren Anwendungsbereich und über die zweckmäßigste Situierung gegenüber Flußlauf und Gelände.

Die gegenwärtig zahlreichen Bauvorhaben und die damit einhergehende lebhaft entwickelte Entwicklung auf diesem Gebiet machen die Herausgabe der Schrift besonders begrüßenswert.

*E. Czitary, Wien.*

**Grundzüge der Tensorrechnung in analytischer Darstellung.** Von *A. Duschek* und *A. Hochrainer*. In drei Teilen. I. Teil: Tensoralgebra. Zweite Auflage. Mit 26 Textabb., VI, 129 S. Wien: Springer-Verlag. 1948. S 27.—, sfr. 12.—, \$ 2.70.

Daß nach knapp zwei Jahren bereits eine Neuauflage des Buches erforderlich war, beweist, daß damit eine Lücke der mathematischen Lehrbuchliteratur ausgefüllt wurde. Die vorliegende zweite Auflage ist im wesentlichen ein unveränderter Abdruck der ersten Auflage. Man darf dem angekündigten II. und III. Teil, deren baldiges Erscheinen in Aussicht gestellt wurde, mit Interesse entgegensehen.

*R. Inzinger, Wien.*

**Integraltafel.** Herausgegeben von *W. Gröbner* und *N. Hofreiter*. I. Teil: Unbestimmte Integrale. VIII, 166 S. Wien und Innsbruck: Springer-Verlag. 1949. S 54.—, sfr. 23.50, \$ 5.40.

Die vorliegende Integraltafel befriedigt ein dringendes Bedürfnis vor allem der Mathematiker, Physiker und Ingenieure, die sie gerne zu Rate ziehen werden, um sich dadurch die zeitraubenden Ausrechnungen der Integrale zu ersparen. Die Verfasser betonen, daß die Tafel kein Lehrbuch der Integralrechnung sein soll und setzen demgemäß eine genügende Vertrautheit mit den grundlegenden Begriffen und Regeln voraus, wobei sie jedoch fallweise auch kurze Überblicke über alle in den einzelnen Fällen brauchbaren Methoden geben.

Der umfangreiche Stoff wird in den drei Abschnitten I. Rationale Integranden, II. Algebraisch irrationale Integranden, III. Transzendente Integranden angeordnet, wobei ein jeder dieser Abschnitte wieder nach Grundtypen von Integralen (z. B.  $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx$ ) unterteilt ist. Insgesamt ergeben sich 46 solcher Grundtypen, von denen sich jede, der Bauart des Integranden

entsprechend, in eine mehr oder weniger große Anzahl von Sonderfällen  $\left( \text{z. B. } \int \frac{dx}{(x^2 + c^2)\sqrt{x^2 - a^2}} \right)$  aufspaltet. Die Tafel enthält ungefähr 1800 wesentlich verschiedene Integrale, wobei es die Verfasser strenge vermieden haben, solche Integrale, die sich lediglich durch verschiedene Zahlenwerte der im Integranden auftretenden Parameter unterscheiden, einzeln anzuführen. Die in den Integralen auftretenden Parameter ermöglichen durch deren spezielle Wahl das Resultat einer vorgelegten Aufgabe anzupassen. Die Einführung von zweckmäßigen Abkürzungen in der Schreibung oftmals wiederkehrender Ausdrücke erhöht dabei die Übersichtlichkeit der Tafel und erleichtert ihren Gebrauch.

Sehr zu begrüßen ist es, daß neben den elementar auswertbaren Integralen vor allem die elliptischen und hyperelliptischen Integrale sowie die Integrale der Weierstraßschen und Jacobischen elliptischen Funktionen eine eingehende Berücksichtigung erfahren haben. Die elliptischen Integrale werden sowohl in der Legendreschen als auch in der Weierstraßschen Form angeführt und ausführliche Hinweise für die Herstellung dieser Formen, ihre gegenseitige Überführung sowie für die Gaußsche und Landensche Transformation angegeben.

Die vorliegende Integraltafel ist das bisher vollständigste Werk dieser Art. Man darf mit großem Interesse dem II. Band der Tafel, der die bestimmten Integrale behandeln wird, entgegensehen.

*R. Inzinger, Wien.*

**Die statistische Theorie des Atoms und ihre Anwendungen.** Von *P. Gombás*. Mit 59 Textabb., VIII, 406 S. Wien: Springer-Verlag. 1949. S 186.—, geb. S 195.—; sfr. 80.—, geb. sfr. 85.—; \$ 18.60, geb. \$ 19.50.

Das vorliegende Buch verfolgt den Zweck, die zahlreichen Eigenschaften der Atome, Moleküle und der zusammenhängenden Materie unter Benützung der statistischen Theorie des Atoms zu erklären. Bei den großen Fortschritten, die mit dieser Theorie bereits erzielt wurden, ist es sehr zu begrüßen, das Gebiet in einer einheitlichen Darstellung zusammengefaßt zur Verfügung zu haben. Besonders hervorzuheben ist es, daß es dem Verfasser gelungen ist, die statistische Theorie des Atoms ohne große mathematische Vorkenntnisse bloß mit den in jeder Differential- und Integralrechnung vermittelten mathematischen Hilfsmitteln darzustellen. Dadurch hat der



Autor besonders dem Experimentalphysiker, dem technischen Physiker sowie dem Chemiker einen wertvollen Dienst erwiesen, da diese nunmehr in die Atomphysik eindringen können, ohne sich den komplizierten Apparat der Quantenmechanik aneignen zu müssen. Dem Wesen der statistischen Theorie des Atoms entsprechend, wurden Fragen des Kernbaues des Atoms als über den Rahmen des Buches hinausgehend nicht behandelt.

Das Buch gliedert sich in einen allgemeinen und einen speziellen Teil. Im allgemeinen Teil werden nach Besprechung der Grundlagen das statistische Modell nach Thomas und Fermie sowie die Erweiterung dieses Modells zu modifizierten Modellen bis zum Thomas-Fermi-Dirac-schen Modell durchgeführt. Ein Abschnitt über Störungsrechnung sowie ein weiterer über die Weiterentwicklung der statistischen Theorie bilden den Abschluß des allgemeinen Teiles.

Im speziellen Teil gelangen zuerst die Atome selbst einschließlich der Ionisierungsenergien, der Termberechnung von Atomspektren, der Atom- und Ionenradien, der magnetischen Eigenschaften und der Streuung von Röntgen- und Elektronenstrahlen zur Besprechung. Der nächste Abschnitt ist den Molekülen gewidmet, wobei neben der Berechnung der Potential- und Elektronenverteilung in einfachen Molekülen auch die heteropolaren und homöopolaren Moleküle zur Besprechung gelangen. Im Abschnitt über Kristalle bilden zuerst die Ionenkristalle ein eigenes Kapitel, während der umfangreichere Teil dieses Abschnittes den Metallen, der metallischen Bindung und der Austrittsarbeit der Elektronen gewidmet ist. Das letzte Kapitel des speziellen Teiles bildet ein Abschnitt über die Materie unter hohem Druck.

Den Abschluß des Buches bildet ein Anhang, der sich mit der Lösung von Gleichungen und der numerischen Berechnung von Beziehungen befaßt, die im Buch zur Besprechung gelangen. Eine Zusammenstellung häufig vorkommender Konstanten und Einheiten sowie ein Literaturverzeichnis beschließen die Darstellung.

Das vorliegende Buch, dessen Druck und Ausstattung als vorzüglich zu bezeichnen sind, stellt zweifellos eine wertvolle Bereicherung des physikalischen Schrifttums dar und dem Buch ist ein voller Erfolg zu wünschen.

F. Regler, Wien.

**Electron Optics and the Electron Microscope.** Von V. K. Zworykin, G. A. Morton, E. G. Ramberg, J. Hillier und A. V. Vance. 766 S. New York: J. Wiley & Sons, Inc. — London: Chapman & Hall, Limited. 1948.

Das Elektronenmikroskop, das während der letzten 10 Jahre zu einem der machtvollsten Forschungsinstrumente für Wissenschaft und Technik entwickelt worden ist, hat das Interesse der Vertreter fast aller Wissenszweige erweckt. In Erkenntnis dieser Tatsache hat es die von Zworykin geführte Forschergruppe bei der RCA, von der jedes Mitglied selbst bedeutsame Beiträge zur Entwicklung der Elektronenmikroskopie beigesteuert hat, unternommen, in einem ausführlichen Werk unser gegenwärtiges Wissen über das Elektronenmikroskop und seiner elektronenoptischen Grundlagen zusammenzufassen. Der Name Zworykin bürgt dafür, daß damit ein sehr wertvolles Buch entstanden ist, das jeder Fachmann besitzen muß. Sein Ziel ist ein zweifaches: erstens soll es dem bereits tätigen oder angehenden Elektronenmikroskopiker die Wirkungsweise seines Instrumentes erklären und mit seiner praktischen Handhabung vertraut machen. Zweitens soll eine systematische Darstellung der praktischen und theoretischen Kenntnisse gegeben werden, welche die Grundlage für die weitere Entwicklung im Bau von Elektronenmikroskopen darstellt. Zu diesem Zweck wurde das Buch in zwei Teile geteilt. Der erste Teil enthält die Beschreibung der verschiedenen Mikroskoptypen und eine nichtmathematische Darstellung der ihnen zugrunde liegenden elektronenoptischen Theorie. Ausführlicher werden die Aufbauprinzipien und Betriebstoleranzen des magnetischen Übermikroskops auseinandergesetzt, das von allen Instrumenten das erfolgreichste ist. Ein Kapitel ist der Konstruktion von geeigneten elektrischen Spannungsquellen für das Mikroskop gewidmet. Der erste Teil schließt mit einem Abschnitt über die Technik der Elektronenmikroskopie und einem Überblick über die mit dem neuen Instrument erzielten Forschungsergebnisse.

Der zweite Teil gibt eine Darstellung der theoretischen Elektronenoptik unter weitgehender Verwendung der mathematischen Hilfsmittel, wie sie die methodische Entwicklung des Gegenstandes eben erfordert. Die Elektronenbewegung in elektrischen und magnetischen Feldern unter optischen Gesichtspunkten, die Messung und Berechnung elektrostatischer Felder, die Bestimmung von Elektronenbahnen auf numerischer, graphischer und mechanischer Grundlage, die Eigenschaften der verschiedenen Typen elektrostatischer Linsen und Spiegel werden besprochen. Hierauf werden in analoger Weise Ausmessung und Berechnung magnetischer Felder sowie die Eigenschaften von Magnetlinsen behandelt. Die Bildfehlertheorie wird in systematischer Weise hergeleitet, die einzelnen Aberrationen in quantitativer Weise diskutiert und Korrektionsmöglichkeiten besprochen. Ein eigenes Kapitel befaßt sich mit dem Einfluß der relativistischen Massenkorrektur. Der letzte Abschnitt gibt einen zusammenfassenden Überblick über den Prozeß der Bildentstehung, insbesondere über die im Objekt auftretenden Streu- und Absorptions-



prozesse, eine schöne Darstellung der Kontureffekte, der Kristallbeugungseinflüsse und der Auflösungsgrenzen. Ein Anhang über das im Zusammenhang mit dem Elektronenvervielfacher und Sondenmikroskop auftretende Rauschproblem und einige nützliche Tafeln zur Elektronenphysik beschließen das Buch.

Das Werk ist 1945 erschienen und hat bereits im Jahre 1948 den dritten Neudruck erfordert. Auch darin zeigt sich seine Aktualität. Es ist klar, daß bei einem so mitten in der Entwicklung stehenden Wissensgebiet, wie es die Elektronenoptik ist, wo fast jede Woche Neues bringt, eine Darstellung nicht in allen Einzelheiten den letzten Anschauungen und Ergebnissen gerecht werden kann. Dazu kommt vielleicht noch, daß 1945 — trotz einer staunenswerten Informiertheit auch über die in Zentraleuropa erschienenen Arbeiten — infolge des Krieges doch einige Arbeiten den Verfassern entgehen mußten. So würde vielleicht mancher gerne auch die Intensitäts- und Energiefragen bei der Abbildung sowie das Problem der Temperaturerhöhung im Objekt durch Elektronenbestrahlung, ferner die wichtige Frage der Abbildung bei gestörter Rotationssymmetrie und schließlich der wellenmechanischen Auflösungsgrenzen, alles Fragen, über die 1945 schon Ergebnisse vorlagen, diskutiert finden. Doch wird durch derartige Wünsche dem großen Wert des Buches kaum Abbruch getan. Wenn aber in der neuen Auflage, die sicher bald notwendig sein wird, diese Nachträge zugleich mit den neuesten Fortschritten ihre Berücksichtigung gefunden haben, wird man das Werk von V. K. Zworykin und seiner Mitarbeiter wohl als das Standardwerk über die Elektronenoptik und Übermikroskopie betrachten können.

W. Glaser, Wien.

**Neue rationelle Betonherzeugung.** Leichtfaßliche Darstellung der wissenschaftlichen Betonsynthese nebst praktischen Anwendungsbeispielen und einem Praktikum der zielsicheren Betonbildung. Von O. R. Solvey. Mit 14 Textabb. und 13 Tab., IX, 110 S. Wien: Springer-Verlag. 1949. S 39.—, sfr. 16.80, \$ 3.90.

Der Verfasser, Ing. O. Solvey-Stern, ein ausgezeichnete Fachmann und Vorkämpfer der Durchsetzung einer wissenschaftlich begründeten Betontechnologie, nennt als Ziel des vorliegenden Werkes, jeden Betonpraktiker instand zu setzen, nach verständnisvoller Materialprüfung zu verlässlichen Betonmischungsangaben zu gelangen und deren Auswirkungen am Bauplatz durch eine Betonkontrolle ständig verfolgen und regeln zu können. Wenn der Verfasser im Anhang III es beklagt, daß eine genaue technologische Beschreibung der in der Praxis ausgeführten Betone nur selten angetroffen wird, wodurch der Fortschritt in der Entwicklung des Baustoffes stark behindert erscheint, so mag das vorliegende Werk dazu beitragen, die neuesten Erkenntnisse der wissenschaftlichen Betontechnologie in breitere Kreise zu tragen und damit dem Fortschritt zu dienen. Es bringt in vorbildlich systematischer Anordnung den neuesten Stand der Erkenntnisse dieses nunmehr rund 30jährigen Wissenszweiges, zu dessen Entwicklung zahlreiche österreichische Forscher, wie Stern, Tillmann, Saliger und andere mehr, einen Gutteil an Forschungsarbeit beigetragen haben.

Im ersten Teil des Werkes wird nach kurzer Definition der „Kennwerte“ (Verteilzahl, Formabwich, Koeffizient der Hauptkornform, Festigkeitsplafond und Verdünnungsabfall) der Gedankengang der zu lösenden Bauaufgaben entwickelt und sofort auf die Lösung einzelner Zahlenbeispiele, wie sie die Baupraxis benötigt, eingegangen. Die Einfachheit der Rechenbeispiele und die Kommentierung der Rechnungsergebnisse werden viele Leser veranlassen, den zweiten Teil des Werkchens zu studieren.

Dieser zweite Teil beschreibt abschnittsweise die Meß- und Hilfsgeräte für die wissenschaftliche Betonsynthese, die Materialprüfung der Ausgangsstoffe, Zuschläge und Zement auf ihre Kennwerte und die Wasseranspruchsgesetze, die die Grundlage der wissenschaftlichen Betontechnologie bilden. Der folgende Abschnitt über die Betonkontrolle und ihre Apparatur soll den Baupraktiker mit den modernen Untersuchungsmethoden und den dabei benötigten Geräten vertraut machen. Eine Gegenüberstellung der Methoden der Betonprüfung nach Bolomey und mit dem Mix-Designer gegen die wissenschaftliche Betonsynthese zeigt die Vorteile der letzteren auf.

Zur Vertiefung des Verständnisses tragen die im Anhang I gegebenen Erläuterungen der „Kornverteilung“ und die im Anhang II gegebene Darstellung der Parabelkontrolle der Körnerhaufwerke wesentlich bei. Ein ausführliches Literaturverzeichnis ebnet dem Leser den Weg zu weiterem Studium und Vertiefung seines Wissens.

F. Pongratz, Wien.

**Die Verbrennungskraftmaschine.** Herausgegeben von H. List: Zweite, neubearbeitete und erweiterte Auflage. Band 1, Teil 1: **Vorwort und Einführung zum Gesamtwerk.** Von H. List. — **Die Betriebsstoffe für Verbrennungskraftmaschinen.** Von A. Philippovich. Mit 86 Textabb., XX, 206 S. Wien: Springer-Verlag. 1949. S 72.—, sfr. 32.—, \$ 7.20.

Güldner hatte das Gesamtgebiet der Verbrennungskraftmaschinen noch in einem Band (3. und letzte Auflage, Berlin 1922) auf 789 Seiten behandeln können. Die zahlreichen Aufsätze



und Bücher über Verbrennungskraftmaschinen in der folgenden Zeit erörterten aber entweder bloß Teilgebiete oder konnten ihres beschränkten Umfanges wegen wichtige Erkenntnisse und Erfahrungen nur kurz erwähnen. Das Sammelwerk Lists, von dessen geplanten sechzehn Bänden einige in mehrere Teilbände zerfallen und nunmehr elf ganz oder in ihrem ersten Teil erschienen sind, vier davon schon in zweiter Auflage, beruht auf der Erfahrung vieler wissenschaftlich und praktisch wohlgeschulter und angesehener Verfasser.

Die vorliegende 2. Auflage des 1. Teiles des 1. Bandes enthält als Einführung den Plan des Gesamtwerkes und eine kurze klare Übersicht über die Arbeitsverfahren der Verbrennungskraftmaschinen. Dann wird als grundlegender chemisch-physikalischer Vorgang die Verbrennung in ihren wichtigsten Formen zusammenhängend besprochen, ehe die Brennstoffe selbst, ihre Herkunft, Erzeugung, Anwendungsgebiete, Eigenschaften und Prüfungsverfahren behandelt werden. Auch Brennstoffe für Verbrennungsturbinen, Strahltriebwerke und Raketen sind einbezogen.

Nach einer Übersicht der Reibungsarten und Schmierzustände werden die Schmierstoffe, ihre Herkunft, Verwendung, Eigenschaften und Prüfung durchgenommen, dann die Zusätze zu Kraftstoffen und Schmiermitteln, um deren Betriebs- und Lagereigenschaften zu verbessern, und schließlich die Kühlstoffe.

Ein Ausblick auf die künftige Entwicklung der Betriebsstoffe, Umrechnungstabellen anglo-amerikanischer Maße in kontinentaleuropäische und umgekehrt, 298 Quellen und ein Sachverzeichnis, das man in der 1. Auflage sehr vermißt hatte, bilden den Abschluß.

Der Band zeigt ebenso durch den Inhalt wie durch das Seitenverhältnis 206 : 70 im Vergleich zur ersten Auflage (1939) die gewaltige Entwicklung der Kenntnis und Technologie der Betriebsstoffe in der Kriege- und Nachkriegszeit. Der tiefe Einblick des Verfassers in die mitteleuropäische Entwicklung der Betriebsstoffe, seine enge Fühlung mit maßgebenden Fachleuten des Auslandes und seine eigenen Forschungen ermöglichen eine erfreulich geschlossene und gründliche Darstellung. Philippovich hat in erster Linie für alle geschrieben, die sich dem Bau und Betrieb der Verbrennungsmotoren widmen, aber auch Chemiker, Brennstofftechnologien und Wirtschaftler werden in diesem Leitfaden guten Rat und verlässliche Führung finden.

Der Verlag hat seinem Rufe entsprechend auch diesen Band schön ausgestattet und kann ebenso wie der Herausgeber und Verfasser stolz auf seine Arbeit unter schwierigen Verhältnissen an diesem Werke sein, das auch im reichen Auslande nicht seinesgleichen findet.

*L. Richter, Wien.*

**Kleines Hilfsbuch für die Starkstromtechnik.** Von *R. Hubauer*. Mit 201 Textabb., VII, 219 S. Wien: F. Deuticke. 1949. Geb. S 24.—.

Nach Art einer kleinen schlichten Enzyklopädie bringt das Buch über die grundlegenden Kapitel der Starkstromtechnik Angaben, die bei Zahlentafeln beginnen und bis zu den elektrischen Maschinen reichen. Die Ausführungen stellen an den Leser fast keine Ansprüche, sind aber gewissenhaft und sorgfältig zusammengestellt und verhältnismäßig reichhaltig. Hier und da fällt eine Kleinigkeit auf: Beispielsweise wäre bei den Maßsystemen auf die Verwendung des Meters als Längeneinheit näher einzugehen, da dieses seit neuerer Zeit als Maßeinheit in den internationalen Vereinbarungen eine bedeutende Rolle spielt. In der nächsten Auflage, die man dem Buch vorausagen darf, könnten Leitungen und Netze stärker berücksichtigt werden.

*L. Kneissler, Wien.*

**Schaltungen aus dem Gebiete der Installationstechnik.** Entwicklung aus den Schaltbedingungen.

I. Teil: Normale und außergewöhnliche Lampenschaltungen. — II. Teil: Schaltungen für Notbeleuchtungsanlagen. — III. Teil: Schaltungen für Heiz- und Kochgeräte. Von *R. Edler*. Dritte Auflage. Mit 103 Textabb., VIII, 73 S. Wien: F. Deuticke. 1949. S 10.—.

Der auf dem Gebiete der Schaltlehre fast seit einem halben Jahrhundert tätige Verfasser gibt eine Einführung in die Gestaltung der Lampenschaltungen, der Schaltungen für Notbeleuchtungsanlagen und für Heiz- und Kochgeräte. Dieses an Umfang bescheidene Werk erreicht sein Ziel durch die Entwicklung aus den Schaltbedingungen „von innen“ in außerordentlich klarer Weise auf dem kürzestmöglichen Wege — wie es nur eine vollkommen ausgereifte Darstellung vermag.

*L. Kneissler, Wien.*

Die Übersetzungen der Zusammenfassungen wurden vom Dokumentations-Zentrum der Technik, Wien, durchgeführt.

Herausgeber und Eigentümer: Springer-Verlag in Wien I, Mülkerbastei 5. — Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. Franz Magyar und Prof. Dr. Karl Wolf, Wien IV, Technische Hochschule, Karlsplatz 13. — Druck: Manz'sche Buchdruckerei, Wien IX, Lustkandlgasse 52.







# Die Verbrennungskraftmaschine

*Erscheint in 16 Bänden, die in sich abgeschlossen und einzeln käuflich sind.*

Herausgegeben von

Prof. Dr. Hans List, Graz.

## **Soeben erschienen:**

Band 1, Teil 1:

### **Die Betriebsstoffe für Verbrennungskraftmaschinen.**

Von Priv.-Doz. Dr. A. Philippovich, Wien. Zweite, neubearbeitete und erweiterte Auflage. Mit 86 Textabbildungen. XX, 206 Seiten. 8° Lex. 1949. S 72.—, sfr. 32.—, \$ 7.20

Die vorliegende Neuauflage berücksichtigt die Entwicklung des letzten Jahrzehnts im In- und vor allem auch im Auslande, die gerade auf dem Gebiet der Betriebsstofftechnik durch die Kriegerfordernisse stürmisch vorwärtsgetrieben wurde. Neu behandelt wurden die Betriebsstoffe der Luftfahrt, die immer mehr zur Verwendung synthetischer Produkte überging, und die Raketentreibstoffe für den modernen Strahlentrieb. Auch auf dem Gebiet der Schmierung erwies sich eine Erweiterung als notwendig.

Band 4, Teil 1:

### **Der Ladungswechsel der Verbrennungskraftmaschine.**

Grundlagen. Die rechnerische Behandlung der instationären Strömungsvorgänge am Motor. Von Prof. Dr. H. List, Graz, und Dr. G. Reyl, Graz. Mit 156 Abbildungen im Text, 2 Tafeln und 4 Tabellen. XI, 239 Seiten. 8° Lex. 1949. S 144.—, sfr. 62.60, \$ 14.40

Der vorliegende erste Teilband bringt zunächst die allgemeinen Grundlagen der Ladungswechselvorgänge, den Ladungswechsel der vollkommenen Maschine und eine zusammenfassende Darstellung der rechnerischen Behandlung instationärer Strömungsvorgänge. Das dabei angewendete, auf einer Arbeit von A. Pischinger fußende Verfahren wurde in Zusammenarbeit mit Großfirmen des Motorenbaus praktisch erprobt und hat dabei wesentlich zur Beschleunigung und zielsicheren Gestaltung der Entwicklung einzelner Motorenbaumuster beigetragen.

## **Früher erschienen:**

Band 8, Teil 2: Schrön, Prof. Dr.-Ing. H., München. Die Dynamik der Verbrennungskraftmaschine. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 187 Abbildungen. VIII, 201 Seiten. 8° Lex. 1947. S 72.—, sfr. 36.—, \$ 8.40

Band 9: Pischinger, Prof. Dr. A., Graz. Die Steuerung der Verbrennungskraftmaschine. Mit 269 Abbildungen. VII, 240 Seiten. 8° Lex. 1948. S 120.—, sfr. 60.—, \$ 14.—

Band 10: Kremser, Dipl.-Ing. H., Graz. Das Triebwerk schnelllaufender Verbrennungskraftmaschinen. Zweite, neubearbeitete Auflage. Mit 187 Abbildungen. IX, 166 Seiten. 8° Lex. 1949. S 72.—, sfr. 31.—, \$ 7.20

Band 12: Mayr, Dipl.-Ing. F., Augsburg. Ortsfeste und Schiffsdieselmotoren. Zweite, unveränderte Auflage. Mit 318 Abbildungen. VIII, 330 Seiten. 8° Lex. 1948. S 128.—, sfr. 64.—, \$ 14.90

## **In Vorbereitung befinden sich:**

Band 1, Teil 2: Gaserzeuger. — Band 2, Teil 1: Thermodynamik und Verlustanalyse der Kolbenverbrennungskraftmaschine. — Band 2, Teil 2: Thermodynamik der Gasturbine. — Band 3: Der Wärmeübergang in der Verbrennungskraftmaschine. — Band 4, Teil 2: Der Ladungswechsel, Zweitakt. — Band 4, Teil 3: Der Ladungswechsel, Viertakt. Ausnützung der Abgasenergie für den Ladungswechsel. — Band 5: Die Gasmaschine. — Band 6: Gemischbildung im Verbrennungsmotor. — Band 7: Gemischbildung im Dieselmotor. — Band 8, Teil 1: Konstruktive Grundlagen der Verbrennungskraftmaschine. — Band 11: Der Aufbau schnelllaufender Verbrennungskraftmaschinen für Kraftfahrzeuge und Triebwagen. — Band 13: Flugmotoren. — Band 14: Betriebszahlen, Verschleiß und Wirtschaftlichkeit der Verbrennungskraftmaschine. — Band 15: Hilfsmaschinen der Verbrennungskraftmaschine mit besonderer Berücksichtigung der Strömungsmaschinen. — Band 16: Die Gasturbine.

Zu beziehen durch jede Buchhandlung

Printed in Austria